

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

**de l'École Centrale de Lyon et de l'Université Claude-Bernard Lyon 1
Spécialité Mécanique**

**Présentée par
Sébastien BESSET**

Modélisation du comportement vibro-acoustique des structures

—

Modèles simplifiés pour l'optimisation

—

Document de synthèse

Soutenue publiquement le 29 juin 2015 devant le jury :

Li Lin Fei Professeur	Beijin University, Pékin, Chine	Rapporteur
Jean-François Deü Professeur	Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, France	Rapporteur
Pierre Argoul Maître de Conférences HDR	École Nationale des Ponts et Chaussées, France	Rapporteur
Éric Jacquelin Professeur	Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France	Président du Jury
Louis Jézéquel Professeur	École Centrale de Lyon, Écully, France	Examinateur

Table des matières

Introduction	1
I Approche modale	4
1 Introduction	5
2 Synthèse modale généralisée : Éléments théoriques	6
2.1 Vision systémique – Synthèse modale généralisée	6
2.2 Modes de branche	7
2.2.1 Double synthèse modale	7
2.2.2 Triple synthèse modale	13
2.3 Développement de la résolvante	14
2.3.1 Double synthèse modale	14
2.3.2 Triple synthèse modale	16
2.4 Comparaison des méthodes décrites	17
3 Applications pratiques	20
3.1 Conception robuste – prise en compte des incertitudes	20
3.1.1 Problème étudié	20
3.1.2 Critères vibroacoustiques	21
3.1.3 Introduction des incertitudes – chaos polynômial	22
3.1.4 Résultats	24
3.2 Amortissement des structures vibrantes	27
3.2.1 Présentation du cas étudié	27
3.2.2 Double synthèse modale	28
3.2.3 Méthode déterminentale	28
3.2.4 Résultats expérimentaux et numériques	31
3.3 Réduction de niveaux de bruit	37
3.3.1 Modèle étudié	37
3.3.2 Optimisation de la structure	37
4 Bilan de la première partie	41

II	Approche énergétique	42
5	Introduction	43
6	Méthode Énergétique Simplifiée	44
6.1	Méthode directe	44
6.1.1	En deux dimensions – structures	45
6.1.2	En trois dimensions – acoustique	46
6.2	Méthodes inverses	48
7	Applications pratiques	49
7.1	Détection de sources	49
7.2	Optimisation des structures	65
7.2.1	Optimisation de l'absorption pariétale	65
7.2.2	Optimisation de forme	67
8	Bilan de la seconde partie	71
III	Approche mixte	72
9	Introduction	73
10	Différentiation champ direct / champ réverbéré	74
10.1	Formulation du problème	74
10.2	Application pratique	77
11	Différentiation fréquentielle	81
11.1	Formulation du problème	81
11.2	Application pratique	86
12	Reconstruction de champ simplifié	88
12.1	Formulation du problème	88
12.2	Reconstruction du bruit rayonné	90
13	Bilan de la troisième partie	98
	Conclusion	99
A	Publications relatives aux travaux effectués : approche modale	101
A.1	Articles de journaux :	101
A.2	Chapitre d'ouvrage :	101
A.3	Articles de congrès :	101

B Publications relatives aux travaux effectués : approche énergétique	103
B.1 Articles de journaux :	103
B.2 Articles de congrès :	103
C Publications relatives aux travaux effectués : approche mixte	105
C.1 Articles de journaux :	105
C.2 Articles de congrès :	105
Bibliographie	107

Introduction

Ce mémoire regroupe les principaux travaux portant sur l'élaboration de méthodes dédiées à l'étude des phénomènes vibroacoustiques en basses, moyennes et hautes fréquences, réalisés depuis la soutenance de ma thèse de doctorat. Ces travaux ne sont pas le fruit d'un travail personnel, mais résultent d'une collaboration avec plusieurs collègues, doctorants et post-doctorants.

Le plan de ce manuscrit répond à une logique que nous allons expliciter dans cette introduction. Il s'agit de présenter des méthodes dédiées à l'étude des systèmes complexes comprenant des phénomènes de couplage fluide / structure ; l'objectif commun des techniques proposées demeure la simplicité de mise en œuvre, qui doit permettre des applications sur des géométries complexes, et la rapidité des calculs.

En premier lieu, il est utile de clarifier les notions de basses, moyennes et hautes fréquences, qui peuvent avoir plusieurs définitions valables. Nous expliciterons ensuite la particularité des problèmes d'optimisation au sens large, et en quoi les méthodes proposées y sont adaptées.

Notions de basses, moyennes et hautes fréquences. Il est courant qu'un auteur précise, avant de présenter ses travaux, la définition qu'il retient pour les notions de basses, moyennes et hautes fréquences. Il est possible d'en envisager plusieurs :

1. le plus simple, dans une optique de calcul numérique, reste de considérer que les moyennes et hautes fréquences sont directement liées à la taille des calculs. Ainsi, on considère qu'on atteint le domaine des fréquences élevées lorsque les codes de calculs ne sont plus en mesure de donner des résultats convergés dans un laps de temps raisonnable. Cette vision du problème peut paraître simpliste mais elle a le mérite de relier directement la fréquence et la lourdeur du calcul. Dans les faits, on s'intéresse souvent aux méthodes développées pour les hautes fréquences lorsqu'on ne parvient plus à calculer au moyen d'un code de calcul "classique" (éléments finis, éléments de frontière...);
2. il est possible de définir les basses, moyennes et hautes fréquences au regard du recouvrement modal aux fréquences considérées. Lorsque le recouvrement modal est important, on considère qu'il n'est plus nécessaire de faire appel à un code de calcul par éléments finis ou éléments de frontières, car les données cinématiques qui sont calculées ne sont plus exploitables. Un calcul par méthode énergétique suffit alors ;
3. on rencontre également une définition reliant la bande de fréquence aux phénomènes de localisation des modes d'une structures. On assimile alors le domaine

des basses fréquences aux modes “globaux”, et les domaines des moyennes et hautes fréquences aux modes “locaux”.

Il convient de préciser que ces différentes “visions” sont complémentaires et, souvent, aboutissent aux mêmes conclusions. Il est fréquent que l’utilisation d’un code de calculs par éléments finis montre ses limites quand le recouvrement modal devient important, et que l’on observe majoritairement des modes locaux. La préoccupation des travaux présentés dans ce mémoire repose beaucoup sur la première définition. Nous cherchons ici à développer des modèles simplifiés permettant de traiter des problèmes dans leur globalité en terme fréquentiel, ce qui est particulièrement utile dans le cadre de problèmes d’optimisation.

Méthodes adaptées aux problèmes d’optimisation. Lorsque l’on parle de problèmes d’optimisation, il convient en premier lieu de préciser ce que l’on souhaite optimiser, et comment on souhaite l’optimiser. En d’autres termes, il s’agit de préciser la ou les fonction(s) objectif, ainsi que les paramètres d’optimisation. Dans ce mémoire, on traitera plusieurs problèmes d’optimisation :

- des problèmes d’optimisation de forme, pour lesquels il s’agit de faire varier la géométrie de la structure considérée pour optimiser une quantité donnée (par exemple le niveau de bruit dans une cavité) ;
- des problèmes d’optimisation de caractéristiques de matériaux, en l’occurrence l’optimisation des coefficients d’absorption des parois d’une cavité acoustique.

Le premier point constitue un défi plus important, surtout si l’on veut éviter le coût de calcul relatif au remaillage entre deux étapes d’optimisation. C’est un problème que nous abordons ici, et qui fait l’objet d’une des thématiques du groupe de recherche au sein duquel j’effectue mes recherches.

Dans ce mémoire, les méthodes présentées permettent de traiter ce type de problème. Précisons que les processus d’optimisation eux-mêmes ne constituent pas l’objet principal de mes travaux, même si plusieurs problèmes d’optimisation y sont abordés. C’est bien de l’adéquation des méthodes aux problèmes qu’il est principalement traité, et les méthodes d’optimisation employées servent essentiellement à montrer la validité des concepts développés.

Organisation du manuscrit. Le présent manuscrit est décomposé en trois parties :

1. Dans la première partie sont décrits les travaux de recherches portant sur l’élaboration de méthodes qui reposent sur une description du champ de déplacement des structures et du champ de pression des parties acoustiques. Il s’agit de méthodes de synthèses modale propres au groupe de recherche auquel j’appartiens et que j’ai eu l’occasion d’étudier lors de ma thèse de doctorat.
2. La seconde partie est consacrée aux méthodes énergétiques, et plus particulièrement à la Méthode Énergétique Simplifiée (MES) développée au laboratoire LTDS. Il s’agit essentiellement de reformulations de la méthode permettant de l’adapter à des problèmes de détection de source, d’optimisation de caractéristiques de matériaux et d’optimisation de forme.

3. La dernière partie regroupe les techniques permettant d'effectuer des études large bande au moyen de formulations hybrides qui reposent sur les travaux des deux premières parties. Différentes approches sont proposées, et une méthode particulière est développée pour l'étude du bruit rayonné par un système de freinage automobile.

Un second document, intitulé “publications relatives aux travaux effectués”, regroupe les publications liées aux travaux présentés ici, et dont la liste figure en annexes A, B et C.

Première partie

Approche modale

1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'utilisation de méthodes reposant sur une discrétisation du champ de déplacement des structures et du champ de pression des fluides. Il s'agit là de méthodes couramment utilisées dans le cadre de l'étude du comportement dynamique des structures en basses fréquences, c'est à dire lorsque le recouvrement modal est suffisamment faible. Par ailleurs, la discrétisation des modèles nécessitant une finesse de maillage fortement liée à la fréquence d'étude, ce type de modélisation atteint rapidement ses limites dans le domaine de la vibro-acoustique. Les travaux décrits ici sont consacrés aux méthodes de réduction, reposant essentiellement sur une synthèse modale généralisée des systèmes étudiés. Ces travaux ont fait l'objet des publications suivantes :

- dans le cadre de la thèse de Sophie Bourmich (CIFRE Renault) : [BBJ⁺08c, BBJ08b, BBJ08a] ;
- dans le cadre de la thèse de Denis Brizard (en partenariat avec EADS) : [BBJT12b, BBJT12a, BBJT11] ;
- dans le cadre de travaux personnels : [BJ13, BJ10, BJ09]. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité de ma thèse de doctorat [Bes06] qui a donnée lieu aux publications suivantes : [BJ08a, BJ08e, BJ08d, BJ08c, BJ07].

Certaines de ces publications sont consignées en annexe A de ce mémoire. Dans un premier temps, nous nous attarderons sur les bases théoriques qui permettront de définir l'approche qui servira aux applications détaillées dans un second temps à la section 3.

2 Synthèse modale généralisée : Éléments théoriques

Les techniques de sous-structuration, condensation et synthèse modale qui sont traitées dans cette section sont la continuité des travaux effectués dans le cadre de ma thèse de doctorat [Bes06]. Deux thèses que j’ai eu l’occasion de co-encadrer ont repris et amélioré ces travaux.

La première, celle de Sophie Bourmich [Bou12], traite de l’optimisation de la qualité vibro-acoustique des véhicules. Une optimisation de la forme de certaines parties d’une automobile est réalisée au moyen de critères modaux reposant sur une décomposition en sous-systèmes et une triple synthèse modale, notion explicitée à la section 2.2.2.

La seconde thèse, celle de Denis Brizard [Bri11], est consacrée au contrôle des vibrations de charge utile sur lanceur spatial. Un modèle réduit, basé sur une sous-structuration faisant intervenir une double synthèse modale (cf. section 2.2.1), est construit dans le but d’optimiser l’amortissement des vibrations en minimisant les calculs nécessaires.

Les résultats présentés dans les sections qui suivent sont largement issus des travaux de thèses des doctorants suscités.

2.1 Vision systémique – Synthèse modale généralisée

Méthodes de sous-structuration et synthèse modale sont le plus souvent associées dans le cadre de la réduction de modèle. La vision systémique d’un système complexe, comprenant plusieurs structures et des parties fluides, sous-entend un choix judicieux des sous-systèmes et des méthodes utilisées pour les représenter. De même, les interfaces entre sous-systèmes doivent faire l’objet d’une attention particulière. Le principe de l’approche systémique consiste à construire un modèle réduit dans lequel les sous-systèmes et les liens qui les relient puissent être clairement identifiés. Une bonne revue de la littérature concernant les méthodes de sous-structuration et synthèse modale appliquées aux problématiques de ce mémoire est disponible dans la thèse de Denis Brizard [Bri11].

L’utilisation de méthodes de synthèse modale plus ou moins complexes n’est pas nouveau. C’est d’abord dans le cadre de la caractérisation du comportement dynamique d’ensemble à partir de sous-structures étudiées séparément pour des besoins industriels (le développement de la navette spatiale de la NASA à partir des années 60) que les premières méthodes de synthèses modales sont mises au point [Hur64,

Hur65, Bam66, GS72, CHK72, CC76, CC77b]. Ces travaux sont ensuite étendus dans le cadre de la discrétisation des structures [HM80, HM82, MH82] et celui des structures non conservatives [HB85, Cra81, Cra89].

Les travaux relatés dans ce mémoire concernent l’extension de la synthèse modale généralisée initiée par Louis Jézéquel [Jé85, JS94a, JS94b] et retravaillée dans ma thèse de doctorat et les publications qui y sont liées [Bes06, BJ08b, BJ08f]. Toute cette théorie repose largement sur les différents types de synthèse modale élaborés dans les années 60 et 70, que l’on peut séparer en deux familles. Les méthodes à interface fixe ont été élaborées par Craig et Bampton en 1968 [CB68]. Ces méthodes décrivent les sous-structures au moyen de leur modes propres à interface fixe et de modes statiques de liaison correspondant à des sollicitations en déplacement de la frontière. Les méthodes à interface libre ont été présentées par Rubin, Mac Neal, Craig et Chang [Mac71, Rub75, CC77a] et utilisent pour décrire la structure les modes propres à interface libre et les modes d’attache des sous-structures qui correspondent à des sollicitations en force de la frontière.

Tous ces travaux sont encore largement utilisés [dCBmfs04, Bal96] ; dans ce mémoire, les deux familles de méthodes présentées ci-dessus sont utilisées pour définir le cadre d’une synthèse modale généralisée : les sous-structures pourront être décrites au moyen de modes fixes ou encastés, mais surtout les frontières entre sous-structures seront représentées par des modes de branche. Par ailleurs, la précision des méthodes utilisées sera accrue par une description de la résolvante en ω^n que nous expliciterons plus loin. Si ces concepts ont déjà été présentés dans ma thèse de doctorat et dans les travaux qui y sont liés [Bes06], leur formulation dans les domaines d’application qui sont traités dans la suite présente une originalité, de même que l’objectif de la réduction modale qui ne se limita pas à un gain de mémoire ou de temps de calcul.

2.2 Modes de branche

Le concept de *mode de branche* correspond à la projection des déplacements de frontière sur une base de modes bien choisis. Nous distinguons ici deux types d’utilisation, dans le cadre de la double et de la triple synthèse modale.

La double synthèse modale permet de représenter un ensemble de sous-structures et leurs interfaces au moyen de bases de modes constituées des modes libres ou encastés des sous-structures et de modes correspondant aux interfaces – les *modes de branche*. C’est le même principe pour la triple synthèse modale, avec en plus la prise en compte d’un fluide (ici de l’air).

2.2.1 Double synthèse modale

Pour plus de clarté, nous expliciterons le principe de la double synthèse modale à travers un exemple simple illustré à la figure 2.1. Cette figure représente une structure composée de deux sous-structures, le cas le plus simple, mais la double synthèse modale peut bien sûr être appliquée à des cas plus complexes.

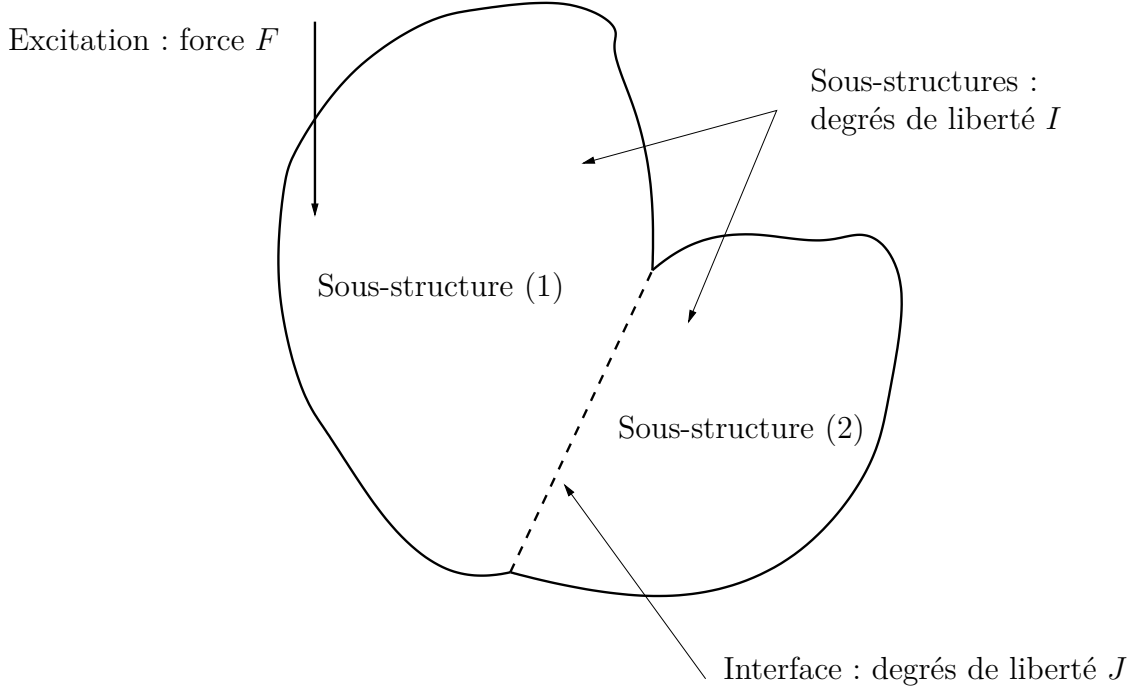


FIGURE 2.1 – Deux sous-structures et leur interface

La double synthèse modale consiste à condenser les interfaces entre sous-systèmes. La base utilisée pour la projection est constituée des *modes de branche*; le plus simple est de choisir les modes de la structure condensée aux interfaces. Si l'on considère la sous-structure (1), les modes de branche, définis sur la frontière entre les deux sous-structures, sont solution de l'équation suivante :

$$(\Psi^T \mathbf{K} \Psi - \omega^2 \Psi^T \mathbf{M} \Psi) \mathbf{X}_j = 0 \quad (2.1)$$

où Ψ est la matrice des modes statiques de liaison de la structure globale :

$$\Psi = \begin{Bmatrix} \Psi_i^{(1)} \\ \Psi_i^{(2)} \\ \Psi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{K}_{ii}^{(1)-1} \mathbf{K}_{ij}^{(1)} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{(2)-1} \mathbf{K}_{ij}^{(2)} \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

avec $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix}$. Seuls les premiers modes de branche sont retenus, ce qui permet de diminuer le nombre de degrés de liberté, d'autant plus que la frontière est étendue.

Reste les points d'excitation à prendre en compte. Deux options sont envisageables :

- Les points d'excitation sont considérés comme faisant partie des degrés de liberté internes de la sous-structure ;
- les points d'excitation sont considérés comme faisant partie de la frontière.

Il est important de noter que la méthode retenue de préjuge en rien de la position réelle de l'excitation. Par la suite, les modes de branche seront notés \mathbf{X}_b .

Ainsi, la méthode présentée ici se décline en trois variantes :

- Méthode à interface fixe et point d'excitation libre ;
- méthode à interface fixe et point d'excitation intégré à la frontière ;
- méthode à interface libre et point d'excitation intégré à la frontière.

Méthode à interface fixe et point d'excitation libre

Dans cette partie, on note Φ_f les modes à interface fixe. On note e le degré de liberté excité (il pourrait y en avoir plusieurs). Pour une sous-structure, la matrice de changement de base s'écrit alors :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Phi_f & \phi & \mathbf{X}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{fi} & \phi_i & \mathbf{X}_{bi} \\ \Phi_{fe} & \phi_e & \mathbf{X}_{be} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_{bj} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

L'équation d'équilibre de la sous-structure, initialement caractérisée par ses matrices de masse \mathbf{M} et de raideur \mathbf{K} peut alors être exprimée sous forme réduite au moyen des matrices de masse et de raideur condensées :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Phi_f^T \mathbf{M} \Phi_f & \Phi_f^T \mathbf{M} \phi & \Phi_f^T \mathbf{M} \mathbf{X}_b \\ \phi^T \mathbf{M} \Phi_f & \phi^T \mathbf{M} \phi & \phi^T \mathbf{M} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_b^T \mathbf{M} \Phi_f & \mathbf{X}_b^T \mathbf{M} \phi & \mathbf{X}_b^T \mathbf{M} \mathbf{X}_b \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Phi_f^T \mathbf{K} \Phi_f & \Phi_f^T \mathbf{K} \phi & \Phi_f^T \mathbf{K} \mathbf{X}_b \\ \phi^T \mathbf{K} \Phi_f & \phi^T \mathbf{K} \phi & \phi^T \mathbf{K} \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_b^T \mathbf{K} \Phi_f & \mathbf{X}_b^T \mathbf{K} \phi & \mathbf{X}_b^T \mathbf{K} \mathbf{X}_b \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Les propriétés d'orthogonalité des modes propres et des modes de branche entraînent les relations suivantes :

$$\Phi_f^T \mathbf{K} \phi = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi_f^T \mathbf{M} \phi = 0 \quad (2.7)$$

Ces relations permettent de simplifier considérablement les équations 2.4 et 2.5. Nous nous intéressons maintenant à l'équilibre d'une sous-structure excitée par une force \mathbf{F} . L'équation d'équilibre dans la base nodale s'écrit classiquement :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.8)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des déplacements nodaux. Dans la base de projection caractérisée par la matrice \mathbf{P} , cette équation devient :

$$\mathbf{P}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} \mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \mathbf{F} \quad (2.9)$$

où $\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix}$ est le vecteur des degrés de liberté généralisés. $\boldsymbol{\eta}$ correspond aux modes propres, $\boldsymbol{\lambda}$ aux modes de branche et $\boldsymbol{\delta}$ aux modes de chargement. On notera $\tilde{\mathbf{M}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ les matrices réduite :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \quad (2.10)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \quad (2.11)$$

Dans le cadre d'une vision systémique, il est intéressant de remarquer la signification physique des trois lignes matricielles de l'équation 2.9.

La première est une équation matricielle en $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})$. Elle régit les degrés de liberté généralisés associés aux modes propres de la sous-structure et fait apparaître un couplage par la masse avec les modes de branche :

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{ii} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ii}) \boldsymbol{\eta} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ij} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Phi}_e^T \mathbf{F}_e \quad (2.12)$$

La seconde concerne le degré de liberté généralisé associé au mode de chargement et fait également apparaître un couplage avec les modes de branche :

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{ee} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ee}) \boldsymbol{\delta} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ej} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\phi}_e^T \mathbf{F}_e \quad (2.13)$$

La dernière régit les degrés de liberté généralisés associés aux modes de branche et fait apparaître un couplage avec les modes propres de la sous-structure et avec le mode de chargement :

$$-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ij} \boldsymbol{\eta} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{je} \boldsymbol{\delta} + (\tilde{\mathbf{K}}_{jj} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{jj}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j \quad (2.14)$$

Nous nous intéressons maintenant aux deux sous-structures (1) et (2) présentées à la figure 2.1. Par définition les modes de branche des deux sous-structures sont identiques. L'équilibre à la frontière s'écrit alors :

$$\mathbf{F}_j^{(1)} + \mathbf{F}_j^{(2)} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

Soit, en multipliant par les modes de branche :

$$\mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j^{(1)} + \mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j^{(2)} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Or, les déplacements nodaux de la frontière sont liés aux déplacements généralisés correspondant aux modes de branche :

$$\mathbf{U}_j^{(n)} = \mathbf{X}_{bj} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} \quad (2.17)$$

où n prend les valeurs 1 ou 2. Dès lors, l'égalité des déplacements de frontière $\mathbf{U}_j^{(1)} = \mathbf{U}_j^{(2)}$ conduit à l'égalité des degrés de liberté généralisés associés aux modes de branche :

$$\boldsymbol{\lambda}^{(1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(2)} = \boldsymbol{\lambda} \quad (2.18)$$

À partir de l'équation 2.12, il est possible d'exprimer $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$. La même chose peut être faite pour le mode de chargement $\boldsymbol{\delta}^{(1)}$ (la sous-structure (2) n'est pas excitée). Toutes les coordonnées modales des sous-structures étant alors exprimées en fonction des seuls degrés de liberté généralisés $\boldsymbol{\lambda}$, on peut écrire l'équation régissant les déplacements généralisés de frontière :

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(1)} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(1)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(1)} - \tilde{\mathbf{D}}_{je}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ee}^{(1)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ej}^{(1)} + \tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(2)} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(2)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(2)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(2)} \right) \boldsymbol{\lambda} \\ & = \left(\mathbf{X}_{be}^T - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(1)} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_e^{(1)T} - \tilde{\mathbf{D}}_{je}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ee}^{(1)} \right)^{-1} \boldsymbol{\phi}_e^{1T} \right) \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec les notations suivantes, où n prend les valeurs 1 et 2 :

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(n)} = -\omega^2 \mathbf{M}_{ii}^{(n)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ii}^{(n)} \quad (2.20)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(n)} = -\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{jj}^{(n)} + \tilde{\mathbf{K}}_{jj}^{(n)} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{kl}^{(n)} = -\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{kl}^{(n)} \quad \text{pour } kl = ij, ej, ji, je \quad (2.22)$$

Le détail de ces calculs apparaît dans le mémoire de thèse de Denis Brizard [Bri11]. Il est intéressant de noter que la taille de cette équation correspond au nombre de modes de branche choisis. Elle est donc *a priori* relativement faible.

Un exemple d'application de la méthode est donné plus loin dans ce chapitre (cf. section 3.2).

Méthode à interface fixe et point d'excitation intégré à la frontière

Nous utilisons ici les modes à interface fixe des sous-structures, comme dans la partie précédente. Le point d'excitation étant inclus dans la frontière, il n'y aura pas de mode de chargement. Les notations et les calculs du précédent paragraphe s'appliquent donc. Dans le cas présent, l'équation d'équilibre matricielle comporte deux lignes reliant $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\lambda}$:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{ii} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ii}) \boldsymbol{\eta} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ij} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

$$-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ji} \boldsymbol{\eta} + (\tilde{\mathbf{K}}_{jj} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{jj}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{X}_{be}^T \mathbf{F}_e + \mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j \quad (2.24)$$

En égalisant les degrés de liberté généralisés correspondant aux modes de branche, on peut ensuite aisément écrire l'équation régissant le comportement des $\boldsymbol{\lambda}$. Par la suite, les résultats de cette méthode seront comparés aux résultats issus de la méthode précédente (cf. section 3.2).

Méthode à interface libre et point d'excitation intégré à la frontière

Les modes utilisés ici pour décrire les sous-structures sont les modes à interface libre. Pour une sous-structure, la base de réduction devient donc :

$$P = \begin{bmatrix} \Phi_l & X_b \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

où Φ_l est la matrice des modes à interfaces libres de la sous-structure, et X_b représente les modes de branche. Si l'on indice comme précédemment i les composantes relatives au degrés de liberté internes à la sous-structure, e la composante relative au degré de liberté excité et j les composantes correspondant aux degrés de liberté de jonction entre sous-structures, les matrices Φ_l et X_b s'écrivent :

$$\Phi_l = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_e \\ \Phi_j \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$X_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_{be} \\ \mathbf{X}_{bj} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Les matrices réduites sont notées comme précédemment $\tilde{\mathbf{M}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$. Le vecteur des forces généralisées s'écrit $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{P}^T \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \Phi_e^T \mathbf{F}_e + \Phi_j^T \mathbf{F}_j \\ \mathbf{X}_{be}^T \mathbf{F}_e + \mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j \end{Bmatrix}$.

L'équation d'équilibre d'une sous-structure excitée comporte deux lignes matricielles :

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{ii} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ii}) \boldsymbol{\eta} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ij} \boldsymbol{\lambda} = \Phi_e^T \mathbf{F}_e + \Phi_j^T \mathbf{F}_j \quad (2.28)$$

$$(\tilde{\mathbf{K}}_{jj} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{jj}) \boldsymbol{\lambda} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ji} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}_{be}^T \mathbf{F}_e + \mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j \quad (2.29)$$

Dans le cas d'une sous-structure non excitée, les termes en F_e n'apparaissent pas. Nous nous intéressons maintenant au couplage entre deux sous-structures (1) et (2) représentées à la figure 2.1. On utilise là aussi le fait que les degrés de liberté de jonction et les modes de branche sont identiques pour les deux sous-structures. Ainsi, on peut formuler la relation entre les forces des sous-structures à la jonction :

$$\mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j^{(1)} + \mathbf{X}_{bj}^T \mathbf{F}_j^{(2)} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

et l'égalité des déplacements de jonction $\mathbf{X}_j^{(1)} = \mathbf{X}_j^{(2)}$:

$$\Phi_j^{(1)} \boldsymbol{\eta}^{(1)} + \mathbf{X}_{bj} \boldsymbol{\lambda}^{(1)} = \Phi_j^{(2)} \boldsymbol{\eta}^{(2)} + \mathbf{X}_{bj} \boldsymbol{\lambda}^{(2)} \quad (2.31)$$

Les équations 2.28 et 2.29, appliquées à chacune des sous-structures, permettent alors de résoudre le problème couplé. Pour ce faire, on exprime $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ en fonction de $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$ et on obtient par substitution un système d'équations ne faisant intervenir que les déplacements généralisés associés aux modes de branche $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$

(qui ne sont pas égaux dans le cas des méthodes faisant intervenir des modes libres), dont l'obtention est explicitée dans le mémoire de thèse de Denis Brizard [Bri11] :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{jj}^{(1)} \boldsymbol{\lambda}^{(1)} = \tilde{\mathbf{G}}_{jf}^{(1)} \mathbf{F}_j^{(1)} + \tilde{\mathbf{G}}_{je}^{(1)} \mathbf{F}_e^{(1)} \quad (2.32)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{jj}^{(2)} \boldsymbol{\lambda}^{(2)} = \tilde{\mathbf{G}}_{jf}^{(2)} \mathbf{F}_j^{(2)} \quad (2.33)$$

avec les notations suivantes, où n prend les valeurs 1 ou 2 :

$$\tilde{\mathbf{H}}_{jj}^{(n)} = \tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(n)} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(n)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(n)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(n)} \quad (2.34)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{jf}^{(n)} = \mathbf{X}_{bj}^{(n)T} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(n)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(n)} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_j^{(n)-1} \quad (2.35)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{je}^{(n)} = \mathbf{X}_{be}^{(n)T} - \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(n)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(n)} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_e^{(n)-1} \quad (2.36)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ii} = \tilde{\mathbf{K}}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii} \quad (2.37)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ii} = \tilde{\mathbf{K}}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii} \quad (2.38)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ij} = -\omega^2 \mathbf{M}_{ij} \quad (2.39)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ji} = -\omega^2 \mathbf{M}_{ji} \quad (2.40)$$

Les équations 2.32 et 2.33 sont alors utilisées pour remplacer $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$ dans la relation régissant les modes de branche issue de l'équation 2.31, où $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ ont d'ores et déjà été substitués. L'équation finale relie les forces de frontière et la force d'excitation.

2.2.2 Triple synthèse modale

La *triple synthèse modale* est une extension de la double synthèse modale au cas de systèmes comportant des fluides légers (air). Cette extension a pour objectif de permettre la prise en compte des interactions fluide-structure et ainsi de traiter des problèmes d'acoustique.

La théorie de la triple synthèse modale est exposée dans plusieurs documents [Bes06, BJ08e, BJ08d, BBJ08b], nous nous contenterons donc ici de rappeler le mode opératoire de l'étude d'un système fluide-structure par triple synthèse modale.

1. Condensation du fluide : modes de cavité $\boldsymbol{\Phi}_f$:
 - les modes sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres du système, partie structure bloquée ;
 - pas de source de débit dans le fluide (le chargement est appliqué sur la structure).
2. Application de la double synthèse modale :
 - les modes de la structures, libres ou encastres, sont calculés à partir de la résolution du problème aux valeurs propres de la structure, la partie fluide étant condensée sur les interfaces fluide-structure ;

- les modes de branche sont calculés comme à la section 2.2.1.
- 3. On obtient un système condensé comprenant uniquement des degrés de liberté généralisés :
 - degrés de liberté généralisés relatifs aux sous-structures $\boldsymbol{\eta}$;
 - degrés de liberté généralisés relatifs aux modes de chargement $\boldsymbol{\delta}$;
 - degrés de liberté généralisés relatifs aux modes de branche $\boldsymbol{\lambda}$;
 - degrés de liberté généralisés relatifs aux modes de cavité $\boldsymbol{\xi}$.

2.3 Développement de la résolvante

Lors d’une synthèse modale “classique”, la base de modes qui sert pour la projection des déplacements d’une sous-structure est choisie en fonction de critères plus ou moins pertinents, mais ne correspond jamais aux modes “réels” de la sous-structure ; il s’agit le plus souvent de modes à interface fixe ou de modes à interface libre, plus rarement de modes chargés à l’interface.

Afin de prendre en compte le déplacement des interfaces, mais aussi pour palier l’effet de troncature occasionné par le choix d’un nombre de modes moins élevé que le nombre de degrés de liberté nodaux, il est nécessaire d’opérer une “compensation de la troncature”. Dans les méthodes décrites aux sections précédentes, il s’agit des modes statiques de liaison ou des modes d’attache. Ces modes correspondent à un développement de la résolvante à l’ordre 0, comme nous allons l’explicitier par la suite.

L’objectif de cette section est d’expliquer comment affiner la compensation de la troncature en y insérant une dépendance en ω . Certes, le système d’équations résultant est plus complexe, mais la précision des résultats, à taille de problème égal, s’en trouve accrue. Par ailleurs, selon les calculs à effectuer, le coût n’est pas nécessairement beaucoup plus élevé. Nous explicitons en premier lieu la démarche dans le cadre de la double synthèse modale. Le principe du développement de la résolvante est ensuite généralisé dans le cas de la triple synthèse modale.

2.3.1 Double synthèse modale

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la double synthèse modale décrite à la section 2.2.1. Dans le cas de la compensation de la troncature par les modes statiques de liaison, on constate que l’on a considéré le déplacement interne dû au déplacement imposé de frontière $\boldsymbol{\Psi}_j$, et que l’on s’en est tenu aux termes de raideur :

$$\boldsymbol{\Psi}_i(\omega) = (\mathbf{K}_{ii} - \omega^2 \mathbf{M}_{ii})^{-1} (\mathbf{K}_{ij} - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}) \boldsymbol{\Psi}_j \quad (2.41)$$

Le déplacement de frontière $\boldsymbol{\Psi}_j$ correspond au déplacements unitaires successifs de chaque degré de liberté d’interface, on a donc $\boldsymbol{\Psi}_j = \mathbf{I}$. On utilise alors l’égalité suivante, valable pour tout entier $n \geq 0$ et largement utilisée dans le cadre de la synthèse modale généralisée [Bes06, Bri11] :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{K}^{-1} + \omega^2 (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}) \mathbf{K}^{-1} + \dots + (\omega^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{n-1} \mathbf{K}^{-1} + (\omega^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^n (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \quad (2.42)$$

Cette relation conduit à l'expression suivante de $\Phi_i(\omega)$:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\omega) = & -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} + \omega^2 \left(-(\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ii}) \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} + \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \right) \\ & + \omega^4 \left(-(\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ii})^2 \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} + (\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ii}) \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \right) + \omega^{2n} (\dots) + \dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si n est l'ordre du développement de la résolvante, on constate que les modes statiques de liaison correspondent bien à un développement à l'ordre 0. Ce développement de la résolvante affecte les modes de branche puisqu'ils sont calculés à partir du problème aux valeurs propres de la structure globale projeté sur les modes de liaison. L'influence de ce développement s'écrit différemment pour les trois méthodes décrites à la section 2.2.1.

Méthode à interface fixe et point d'excitation libre

Le meilleur moyen de mettre en évidence le développement en ω^{2n} de la résolvante est de considérer une dépendance en ω de la matrice de passage \mathbf{P} utilisée pour la réduction modale d'une sous-structure :

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{P}_0 + \omega^2 \mathbf{P}_1 + \omega^4 \mathbf{P}_2 + \dots + \omega^{2N} \mathbf{P}_N = \sum_{n=0}^N \omega^{2n} \mathbf{P}_n \quad (2.44)$$

Pour $n \neq 0$, les matrices \mathbf{P}_n ne sont alimentés qu'au niveau des termes faisant correspondre les degrés de liberté internes (lignes de \mathbf{P}_n) et les modes de branche (colonnes de \mathbf{P}_n). Prendre en compte le développement de la résolvante ajoute donc peu de termes aux matrices.

Les matrices de masse et de raideur réduites dans la base $\mathbf{P}(\omega)$ prennent alors la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{M}}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{ii} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{ij} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{ee} & \tilde{\mathbf{M}}_{ej} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{ji} & \tilde{\mathbf{M}}_{je} & \tilde{\mathbf{M}}_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{ij}(\omega) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{ej}(\omega) \\ \tilde{\mathbf{M}}_{ji}(\omega) & \tilde{\mathbf{M}}_{je}(\omega) & \tilde{\mathbf{M}}_{jj}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{ii} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ee} & \tilde{\mathbf{K}}_{ej} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ji} & \tilde{\mathbf{K}}_{je} & \tilde{\mathbf{K}}_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ij}(\omega) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ej}(\omega) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ji}(\omega) & \tilde{\mathbf{K}}_{je}(\omega) & \tilde{\mathbf{K}}_{jj}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Ainsi, la dépendance en ω se propage jusqu'à l'équation régissant les déplacements généralisés de frontière 2.19 qui devient :

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(1)} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(1)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(1)} - \tilde{\mathbf{D}}_{je}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ee}^{(1)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ej}^{(1)} + \tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(2)} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(2)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(2)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(2)} \right) \boldsymbol{\lambda} \\ &= \left(\mathbf{X}_{be}^T(\omega) - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(1)} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_e^{(1)T} - \tilde{\mathbf{D}}_{je}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ee}^{(1)} \right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_e^{(1)T} \right) \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (2.47)$$

avec les notations suivantes, où n prend les valeurs 1 et 2 :

$$\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(n)} = -\omega^2 \mathbf{M}_{ii}^{(n)} + \tilde{\mathbf{K}}_{ii}^{(n)} \quad (2.48)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(n)} = -\omega^2 \left(\tilde{\mathbf{M}}_{jj}^{(n)} + \tilde{\mathbf{M}}_{jj}^{(n)}(\omega) \right) + \tilde{\mathbf{K}}_{jj}^{(n)} + \tilde{\mathbf{K}}_{jj}(\omega) \quad (2.49)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{kl}^{(n)} = -\omega^2 \left(\tilde{\mathbf{M}}_{kl}^{(n)} + \tilde{\mathbf{M}}_{kl}^{(n)}(\omega) \right) + \tilde{\mathbf{K}}_{kl}^{(n)}(\omega) \quad \text{pour } kl = ij, ej, ji, je \quad (2.50)$$

On note la très grande similarité de ces équations et des équations 2.19, 2.20, 2.21 et 2.22 ; seule la dépendance en ω est ajoutée.

Méthode à interface fixe et point d'excitation intégré à la frontière

Le principe est le même que pour la méthode précédente ; les contributions des modes propres pour la sous-structure n s'exprime en fonction des contributions des modes de branche ($\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$) :

$$\boldsymbol{\eta}^{(n)} = - \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(n)} \right)^{(-1)} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(n)} \boldsymbol{\lambda} \quad (2.51)$$

L'équation régissant les modes de branche s'écrit alors :

$$\left(\tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(1)} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(1)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(1)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(1)} + \tilde{\mathbf{D}}_{jj}^{(2)} - \tilde{\mathbf{D}}_{ji}^{(2)} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{ii}^{(2)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{D}}_{ij}^{(2)} \right) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{X}_{be}^T \mathbf{F}_e \quad (2.52)$$

Méthode à interface libre et point d'excitation intégré à la frontière

La méthode utilisée ici est identique à celle décrite à la sous-section 2.2.1, mais en intégrant les dépendances en ω dans les matrices intervenant dans les équations de résolution.

2.3.2 Triple synthèse modale

Le cas de la triple synthèse modale est presque identique à celui de la double synthèse modale ; dans le cas de la triple synthèse modale, le calcul des modes de branche est légèrement différent puisqu'il se fait à partir de la structure condensée aux interfaces entre les sous-structure en considérant également la condensation du fluide. Néanmoins, le développement de la résolvante reste identique.

2.4 Comparaison des méthodes décrites

Dans cette section nous illustrons la double synthèse modale – et notamment les trois différentes méthodes décrites à la section 2.2.1.

La structure adoptée pour les essais numérique est représentée à la figure 2.2. Ses caractéristiques sont consignées dans le tableau 2.1. Dans la figure 2.2, la notation des nœuds est cohérente avec celle de la toolbox SDTools¹, toolbox avec laquelle sont effectués une grande partie des calculs. Pour chacune des méthodes proposées, deux calculs ont été effectués. Le premier calcul rend compte de la réponse au point 1 de la structure, le second de la réponse au point 3 (ces points sont indiqués sur la figure 2.2). Les calculs sont effectués à partir de 30 modes de branche et 20 modes propres.

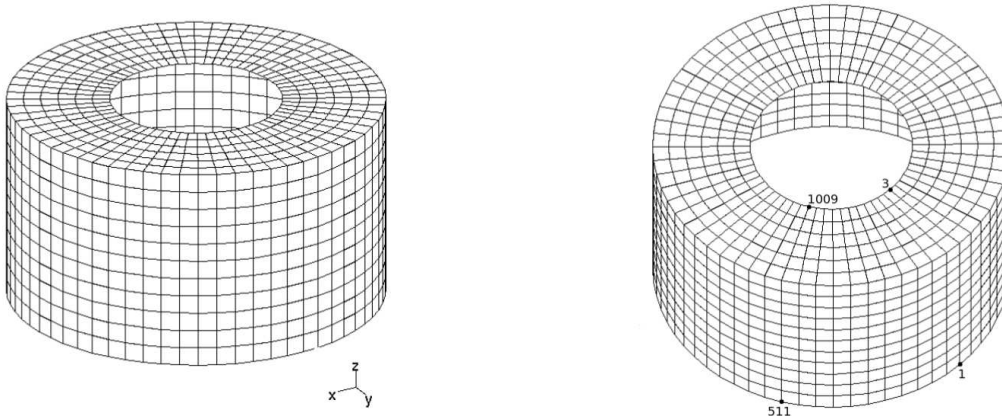


FIGURE 2.2 – Structure utilisée pour les essais numériques. Figure issue de la thèse de Denis Brizard [Bri11].

On constate que dans le cas étudié, les méthodes à interface fixe sont plus performantes que les méthodes à interface libre. Ceci est dû au fait que les conditions réelles des interfaces sont plus proches de conditions encastrees que libres. Les différences entre méthode à interface fixe et point d’excitation intégré à la frontière et méthode à interface fixe et point d’excitation libre sont visibles aux antirésonances, plus précisément retransmises lorsque le point d’excitation est intégré à la frontière ; lorsque le point d’excitation est libre, on a en revanche de meilleurs résultats sur la sous-structure non excitée.

1. Les degrés de liberté sont numérotés selon la convention `nœud.ddl`, où `.01`, `.02` et `.03` correspondent respectivement aux translations selon x , y et z , et `.04`, `.05` et `.06` correspondent respectivement aux rotations selon x , y et z .

Caractéristique	Valeur
diamètre extérieur	1,1 m
diamètre intérieur	0,5 m
hauteur	1,2 m
épaisseur du cylindre	0,008 m
épaisseur de l'anneau	0,008 m
module de Young E	72 GPa
coefficient de Poisson ν	0,3
masse volumique ρ	2700 kgm ⁻³

TABLE 2.1 – Caractéristiques de la structure étudiée. Figure issue de la thèse de Denis Brizard [Bri11].

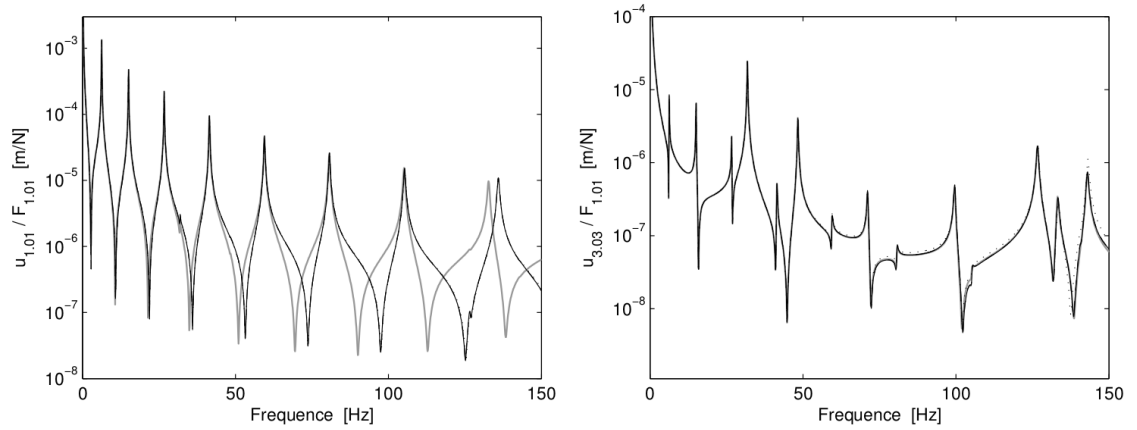


FIGURE 2.3 – Méthode à interface fixe et point d'excitation libre : réponses aux points 1 et 3. — : solution exacte; ... : ordre 0; - - - : ordre 1; — : ordre 2. Figure issue de la thèse de Denis Brizard [Bri11].

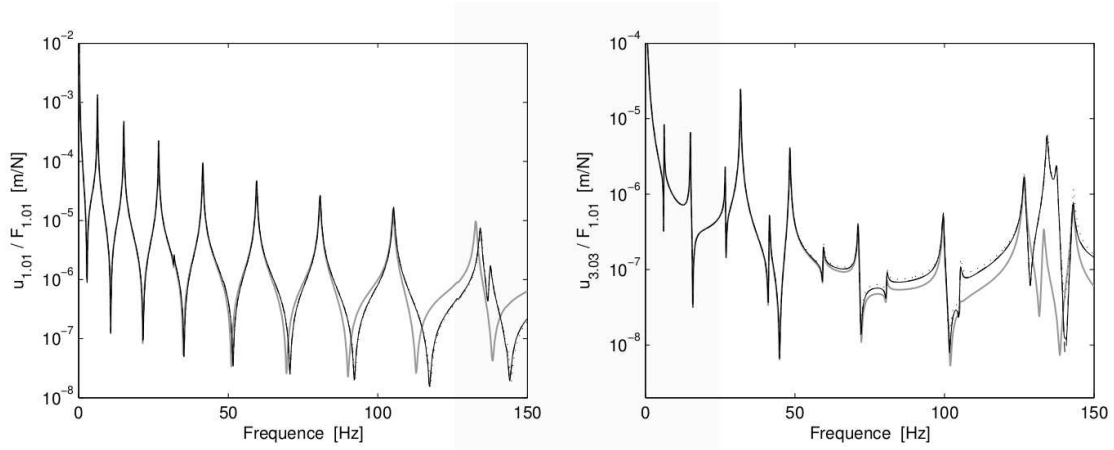


FIGURE 2.4 – Méthode à interface fixe et point d'excitation intégré à la frontière : réponses aux points 1 et 3. — : solution exacte; \cdots : ordre 0; - - - : ordre 1; — : ordre 2. Figure issue de la thèse de Denis Brizard [Bri11].

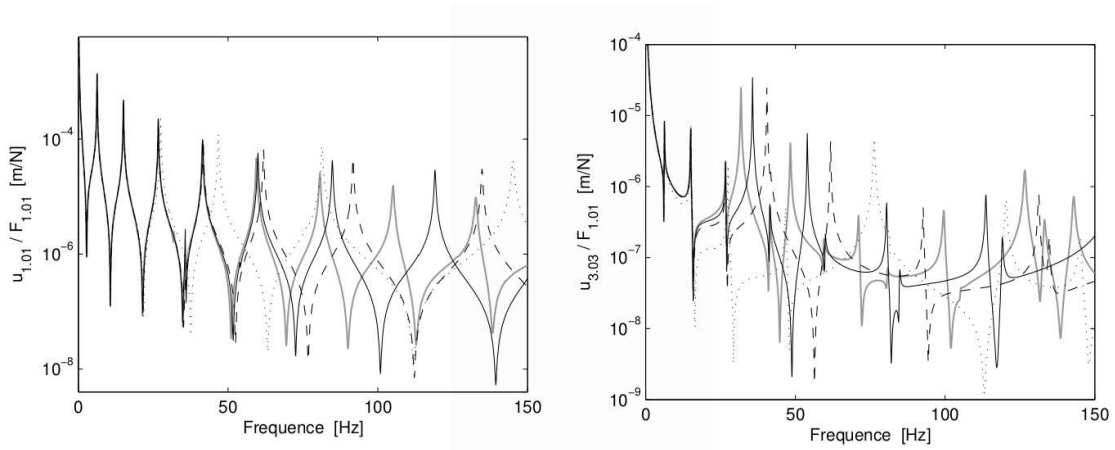


FIGURE 2.5 – Méthode à interface libre et point d'excitation intégré à la frontière : réponses aux points 1 et 3. — : solution exacte; \cdots : ordre 0; - - - : ordre 1; — : ordre 2. Figure issue de la thèse de Denis Brizard [Bri11].

3 Applications pratiques

3.1 Conception robuste – prise en compte des incertitudes

Dans cette section, nous nous intéressons à la prise en compte des aléas dans les critères d'optimisation élaborés dans mes travaux de thèse [Bes06] et les publications associées [BJ08d, BJ07]. Ces travaux ont été complétés et étendus au cas du contrôle actif des structures [BJ10] et à l'introduction d'aléa par la méthode du chaos polynômial [BJ13].

3.1.1 Problème étudié

La figure 3.1 montre le modèle très simple utilisé pour tester la méthode proposée. Il s'agit d'une cavité parallélépipédique contenant de l'air. La formulation du problème passe par une description des variables de déplacement et de pression du système (U, P) très classique dont les équations sont données dans de nombreux ouvrages [MO95].

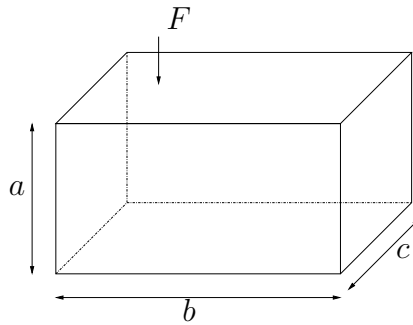


FIGURE 3.1 – Modèle utilisé pour les calculs

La triple synthèse modale est appliquée sur les équations du mouvement du système. Nous ne rappelons pas les différentes étapes nécessaire à l'obtention des équations finales (elles sont décrites dans des travaux antérieurs [Bes06, BJ08e]) :

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \\ \mathbf{U}_e \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

\Downarrow (triple synthèse modale)

$$(\tilde{\mathbf{K}} + i\omega\tilde{\mathbf{C}} - \omega^2\tilde{\mathbf{M}}) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.2)$$

\mathbf{U}_i , \mathbf{U}_j , \mathbf{U}_e et \mathbf{P} sont respectivement les déplacements internes, les déplacements aux interfaces, le déplacement du point excité et les degrés de liberté de pression du système. $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\xi}$ sont respectivement les degrés de liberté généralisés associés aux modes de branche, aux mode de chargement, aux modes propres et aux modes de cavité.

3.1.2 Critères vibroacoustiques

Nous considérons ici les critères d'optimisation développés lors de travaux précédents [Bes06, BJ08e]. L'objectif était de construire des critères basés sur les formulations issues de la double et de la triple synthèse modale et représentatifs des différents "trajets" possibles pour la propagation des vibrations (trajets solidiens, par l'air, par les corps creux...).

Dans cette étude, nous considérons l'un de ces critères, qui relie directement la pression à la force d'excitation. Une triple synthèse modale à modes encastrés est employée. Les équations de la synthèse modale permettent d'exprimer le vecteur pression \mathbf{P} en fonction de $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}_f \boldsymbol{\xi} = \sum_{n=1}^{N_f} \boldsymbol{\Phi}_f^n \boldsymbol{\xi}^n \quad (3.3)$$

où N_f est le nombre de modes de cavité retenus et $\boldsymbol{\Phi}_f$ est la base des modes de cavité. $\boldsymbol{\Phi}_f^n$ désigne la $n^{\text{ème}}$ colonne de $\boldsymbol{\Phi}_f$ et $\boldsymbol{\xi}^n$ la $n^{\text{ème}}$ composante de $\boldsymbol{\xi}$. Considérons maintenant la $n^{\text{ème}}$ ligne de l'équation 3.2 :

$$-\omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\lambda}^n \boldsymbol{\lambda} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\eta}^n \boldsymbol{\eta} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\delta}^n \boldsymbol{\delta} + \left((\omega_f^n)^2 - \omega^2 + i\omega\tilde{c}_n \right) \boldsymbol{\xi}^n = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

où ω_f^n est la $n^{\text{ème}}$ pulsation propre de la cavité (donc le terme de "raideur" si les matrices sont normées correctement) et \tilde{c}_n le $n^{\text{ème}}$ terme de l'amortissement dans la base modale (matrice diagonale grâce à l'hypothèse de Basile).

La pression \mathbf{P} peut alors s'exprimer à l'aide de l'équation 3.3 :

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\omega^2 \Phi_f^n (\tilde{\mathbf{M}}_{\xi\lambda}^n \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\eta}^n \boldsymbol{\eta} + \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\delta}^n \boldsymbol{\delta})}{(\omega_f^n)^2 - \omega^2 + i\omega\tilde{c}_n} \quad (3.5)$$

Le critère considéré ici relie directement la pression et les degrés de liberté de structure :

$$C_1 = \sum_{n=1}^{N_p} \left\| \frac{\omega_p^n \Phi_f^n (\tilde{\mathbf{M}}_{\xi\delta}^n - \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\lambda}^n \tilde{\Phi}_b \Psi_{be} - \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\eta}^n \tilde{\Phi}_s \Psi_{se})}{\tilde{c}_s} \right\| \quad (3.6)$$

où Φ_b est la matrice des modes de branche et $\tilde{\Phi}_b$ sa pseudo-inverse, Φ_s est la matrice des modes de structure et $\tilde{\Phi}_s$ sa pseudo-inverse, Ψ_{be} et Ψ_{se} les modes statiques de liaison.

3.1.3 Introduction des incertitudes – chaos polynômial

Nous allons maintenant introduire un nouveau critère, très semblable au critère 3.6 mais faisant intervenir les parties stochastiques des matrices de masse et de raideur issues de l'analyse par chaos polynômial du système. En premier lieu, nous rappelons les équations du chaos polynômial ; nous appliquons ensuite cette méthode à l'exemple qui nous intéresse.

La théorie du chaos polynômial est expliquée dans de nombreux ouvrages, parmi lesquels celui de Ghanem et Spanos est particulièrement intéressant [GS91]. L'incertitude est ici introduite sur la matrice de raideur réduite, donc sur les modes propres des sous-structures ; un terme $\tilde{\mathbf{K}}_i$ est ajouté à la matrice de raideur :

$$\left((\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}_i) + i\omega\tilde{\mathbf{C}} - \omega^2\tilde{\mathbf{M}} \right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.7)$$

où $\tilde{\mathbf{K}}_i$ est la partie stochastique de la matrice de raideur. La matrice $\tilde{\mathbf{K}}_i$ et le vecteur $\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Bmatrix}$ sont projetés sur le chaos polynômial :

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = \sum_{q=1}^Q \zeta_q \hat{\mathbf{K}}_q \quad (3.8)$$

$$\mathbf{q} = \sum_{n=1}^N \mathbf{q}_n \psi_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_Q) \quad (3.9)$$

Nous allons ici nous contenter du cas ($Q = 1, N = 2$), d'où les expressions suivantes :

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = \zeta \hat{\mathbf{K}}_1 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{q} = \sum_{n=1}^2 \mathbf{q}_n \psi_n(\zeta) \quad (3.11)$$

avec les polynômes ψ_1 et ψ_2 :

$$\psi_1(\zeta) = 1 \quad (3.12)$$

$$\psi_2(\zeta) = \zeta \quad (3.13)$$

En utilisant les équations 3.10 et 3.11, l'équation 3.7 devient :

$$(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M} + i\omega \mathcal{C} + \mathcal{A}) \mathbf{U} = \mathbf{B} \quad (3.14)$$

avec les notations :

$$\mathcal{K}_{ii} = \tilde{\mathbf{K}}_i < \psi_i \psi_j >, \quad \mathcal{K}_{ij} = \mathbf{0} \text{ if } i \neq j \quad (3.15)$$

$$\mathcal{A}_{ij} = < \zeta \psi_i \psi_j > \hat{\mathbf{K}}_1 \quad (3.16)$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{U}_i = \boldsymbol{\eta}_i \quad (3.19)$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

où $< \psi_i \psi_j > = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \psi_i(x) \psi_j(x) \right) dx$. Dans la suite, nous nous intéressons plus particulièrement à η_1 , qui correspond à la réponse moyenne. Ainsi, nous introduisons un nouveau critère \tilde{C}_1 très semblable au critère C_1 défini à l'équation 3.6, mais correspondant à une réponse moyenne :

$$\tilde{C}_1 = \sum_{n=1}^{N_p} \left\| \frac{\omega_p^n \boldsymbol{\Phi}_f^n \left(\tilde{\mathbf{M}}_{\xi\delta}^n - \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\lambda} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_b \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\xi\delta} - \tilde{\mathbf{M}}_{\xi\eta}^n \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_s \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{\eta\delta} \right)}{\tilde{c}_s} \right\| \quad (3.21)$$

où les matrices $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{be}$ et $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{se}$ sont les parties de $\boldsymbol{\Psi}_{be}$ et $\boldsymbol{\Psi}_{se}$ relatives au chaos polynomial. Dans la suite, le critère lié à la robustesse est défini par :

$$C_2 = |C_1 - \tilde{C}_1| \quad (3.22)$$

3.1.4 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus par application de la méthode sur le modèle de la figure 3.1. Les FRF donnant la pression quadratique en fonction de la fréquence sont présentées à la figure 3.2.

Nous cherchons ici à minimiser le critère C_1 correspondant au chemin direct entre l'excitation et le point d'écoute, mais également le critère C_2 qui correspond à l'écart entre la valeur déterministe et la moyenne, et qui peut donc être considéré comme un critère lié à la robustesse de la solution retenue. Une solution "classique" pour tenir compte de deux critères lors d'un problème d'optimisation consiste à formuler la fonction objectif comme une combinaison linéaire de ces deux critères, associés à des "poids" bien choisis. On obtient ainsi une fonction objectif du type $f(C_1, C_2) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$. Cette méthode présente l'avantage (ou l'inconvénient ?) de conduire à une unique solution pour un couple (α_1, α_2) donné. Nous préférons ici utiliser deux fonctions objectifs distinctes, l'une reliée à C_1 , l'autre à C_2 , et utiliser un algorithme génétique conduisant à plusieurs solutions qui sont autant de compromis entre les deux critères. Le problème d'optimisation correspondant peut s'écrire :

$$(a_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) \text{ est une solution optimale} \\ \Leftrightarrow \nexists (a, b, c) / \begin{cases} C_1(a, b, c) < C_1(a_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) \\ \text{et } C_2(a, b, c) < C_2(a_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}, c_{\text{opt}}) \end{cases} \quad (3.23)$$

Nous pouvons alors optimiser la géométrie de notre structure en jouant sur les paramètres de conception a , b et c . La résolution du problème conduit à un grand nombre de solution optimales qui sont présentées sous forme de *front de Pareto* à la figure 3.3. Les valeurs des paramètres de conception avant optimisation sont ($a = 1\text{m}$, $b = 1.2\text{m}$, $c = 1.3\text{m}$). Les points verts représentent les points calculés, les bleus les solutions optimales.

Parmi les points bleus de la figure 3.3, nous choisissons deux points (donc deux solutions optimales), l'un favorisant le critère C_1 , l'autre le critère C_2 . Pour chacune de ces solution, nous traçons la FRF correspondante (figure 3.5 pour la première solution, figure 3.4 pour la seconde). Sur ces figures, les courbes rouge, bleue et noire sont très proches. Le résultat le plus important est l'écart entre la courbe rouge et les courbes vertes qui correspond à la robustesse de la solution.

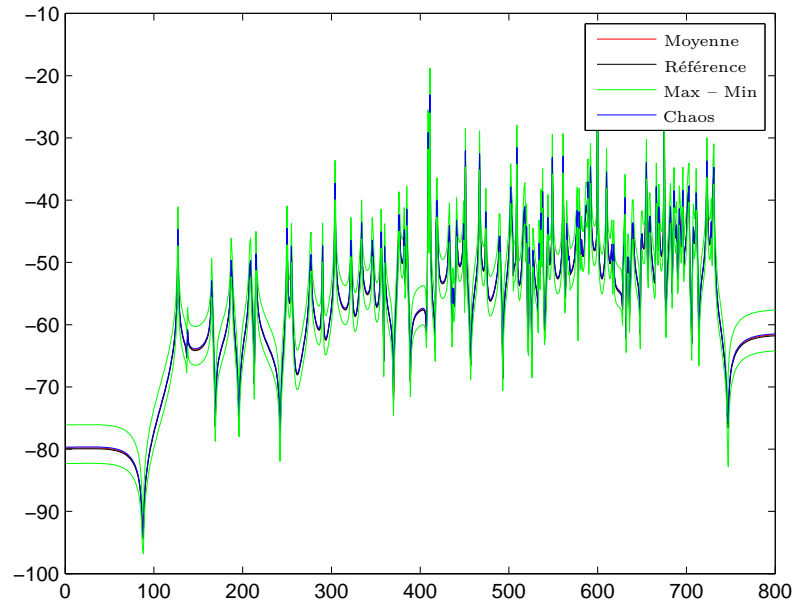


FIGURE 3.2 – Pression quadratique dans la cavité – axe x : fréquences, axe y : pression quadratique

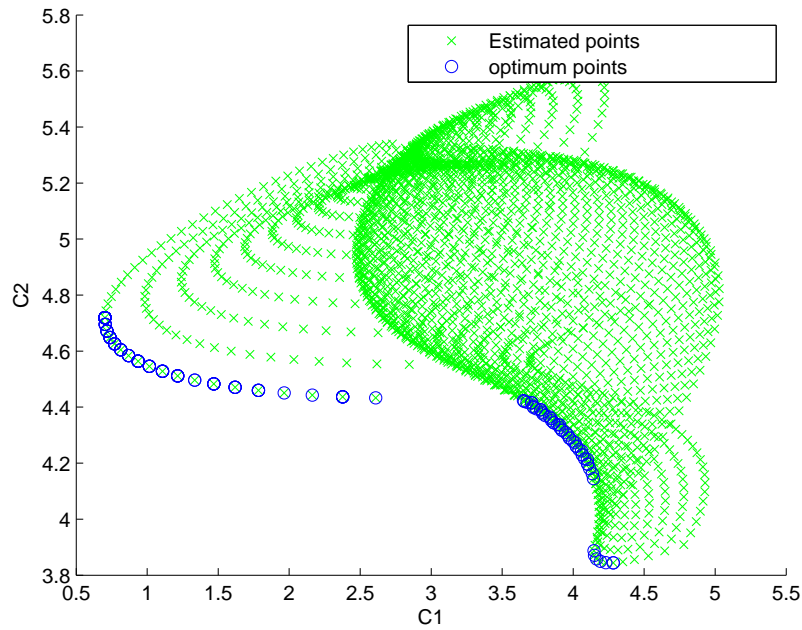


FIGURE 3.3 – Front de Pareto – résultat de l'optimisation. Les axes x et y correspondent aux critères $C1$ et $C2$.

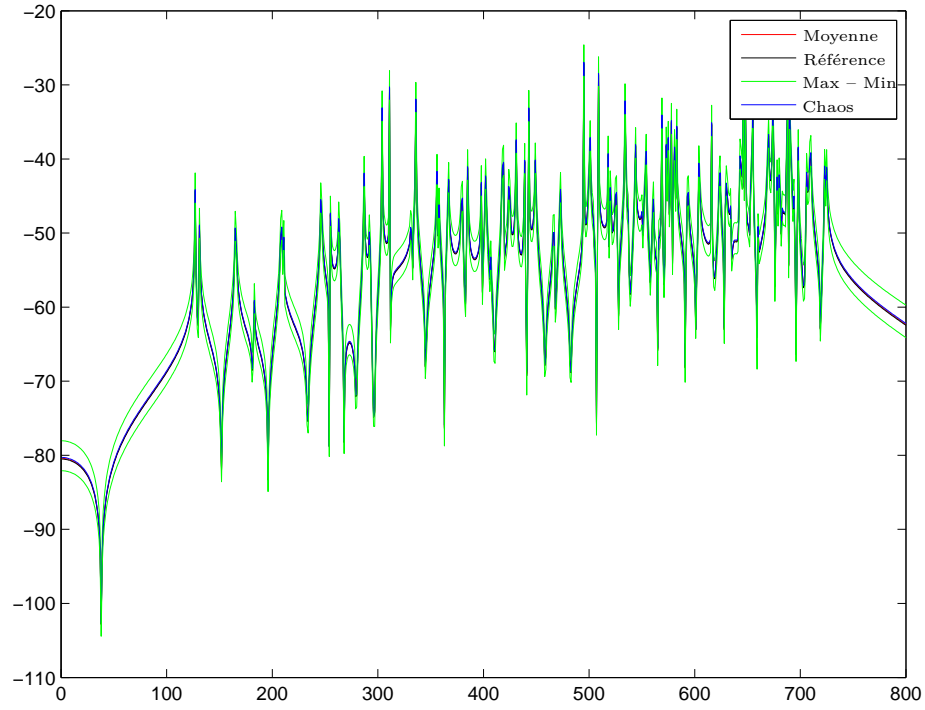


FIGURE 3.4 – Pression quadratique dans la cavité – $a = 1$, $b = 1.26$, $c = 1.3$. Axe x : fréquence, axe y : pression quadratique.

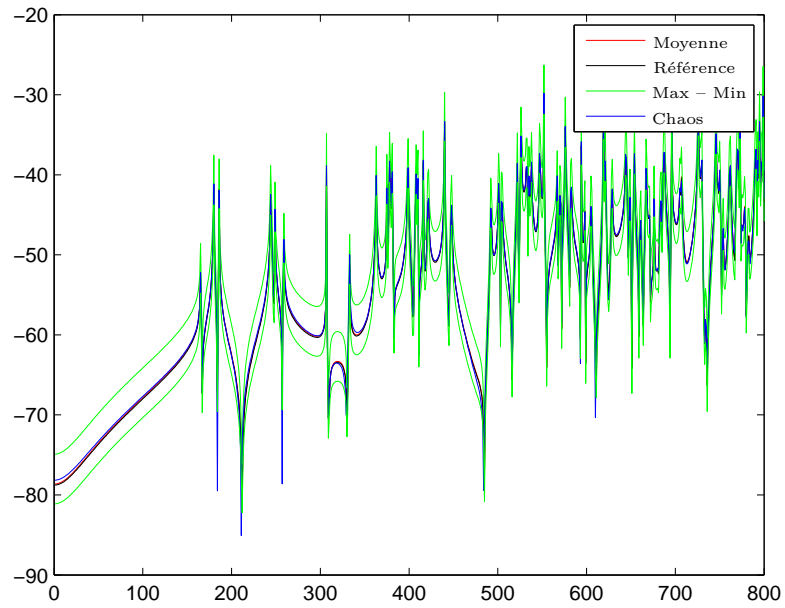


FIGURE 3.5 – Pression quadratique dans la cavité – $a = 1$, $b = 0.92$, $c = 0.89$. Axe x : fréquence, axe y : pression quadratique.

3.2 Amortissement des structures vibrantes

Le principe de la double synthèse modale est utilisé dans les travaux de thèse de Denis Brizard, dans le cadre de la réduction et du contrôle des vibrations de charge utile sur lanceur spatial (thèse en collaboration avec EADS).

Nous présentons en premier lieu les outils utilisés pour traiter le problème. Nous utilisons ensuite les méthodes présentées pour traiter un exemple concret.

3.2.1 Présentation du cas étudié

Cahier des charges EADS

Pour cette étude, EADS a fourni un cahier des charges fonctionnel (masse de la charge utile, fréquences des premiers modes de la structure...). Pour des raisons évidentes de confidentialité, ce cahier des charges n'est pas présenté dans ce mémoire. Néanmoins, nous présentons tout de même la maquette étudiée à la figure 3.6. Nous nous intéressons à l'évolution des caractéristiques de cette maquette lorsqu'elle subit une modification (ajout de raideur locale, frotteur...). Nous introduisons ici une méthode de suivi des valeurs propres d'une structure modifiée appelée *méthode déterminantale* et publiée dans le cadre de la thèse de Denis Brizard [BBJT12b]. Cette méthode, associée à la double synthèse modale, permet ensuite de concevoir un amortisseur frottant destiné à réduire les vibrations du lanceur – conception également publiée par Denis Brizard [BBJT12a].

Maquette étudiée

La maquette étudiée est représentée à la figure 3.6. Ses caractéristiques sont consignées dans le tableau 3.1.

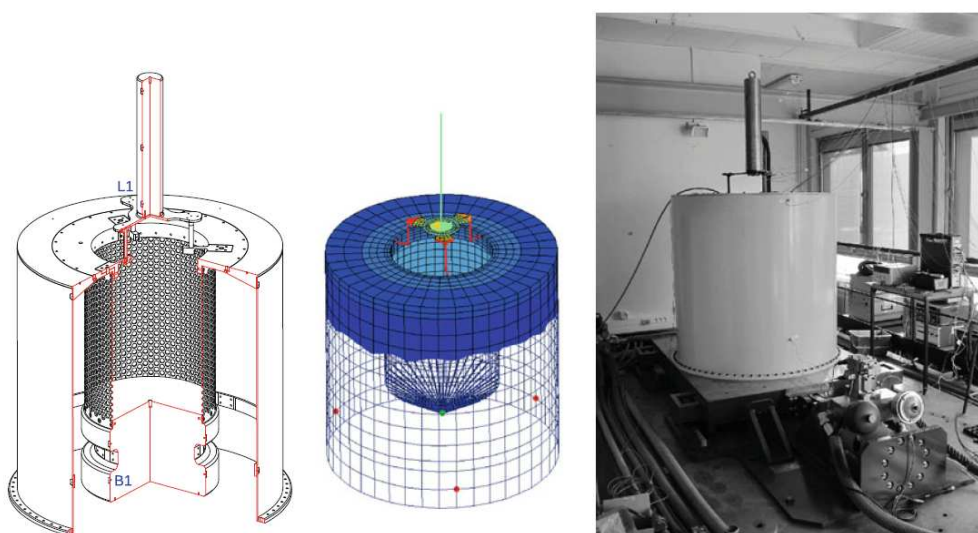


FIGURE 3.6 – Maquette étudiée – plan, modèle EF et photo

Ensemble	Caractéristique	Valeur
Charge utile	1 ^{er} mode de flexion	environ 15 Hz
	masse	60 kg
Étage	hauteur	1,2 m
Maquette complète	1 ^{er} mode de flexion	environ 20 Hz
	hauteur	2,1 m
	diamètre externe	1,220 m
	diamètre interne	0,6 m
	masse	1,5 t
Lest	masse	880 kg
Matériau	module de Young E	210 GPa
	coefficient de Poisson ν	0,285
	masse volumique ρ	7800 kgm ⁻³

TABLE 3.1 – Caractéristique de la maquette représentée à la figure 3.6

3.2.2 Double synthèse modale

La double synthèse modale a déjà fait l’objet de la section 2.2.1. Pour le cas d’étude décrit ici, nous utilisons la méthode décrite à la section 2.3.1, à frontière fixe et point d’excitation intégré à la frontière.

3.2.3 Méthode déterminentale

Nous présentons ici une méthode de suivi des valeurs propres d’une structure soumise à des modifications. Cette méthode a été mise au point dans le cadre de la thèse de Denis Brizard [Bri11].

Les méthodes de prise en compte des modifications d’une structures sont nombreuses et ont été largement étudiées. On trouvera une revue très intéressante des différentes techniques existantes dans un article de Baldwin et Hutton [BH85] ; les différentes méthodes répertoriées sont classées en trois catégories, celles qui reposent sur de petites modification (méthodes de perturbation, étude de sensibilité etc.), celles qui reposent sur des approximations modales, et enfin les techniques concernant les modifications locales des structures. C’est cette dernière catégorie qui nous intéresse ici.

L’originalité de la méthode utilisée ici réside dans la possibilité de se contenter d’une description de type “boîte noire” du comportement dynamique de la structure. En effet, les méthodes existantes nécessitent le plus souvent une connaissance explicite de tous les modes propres de la structure ou des fonctions de transfert. Les premiers travaux dans ce domaine ont été publiés par Weissenburger [Wei68], dans le cas d’une structure non amortie. La méthode proposée par Weissenburger a ensuite été améliorée et étendue au cas de structures amorties linéaires. Parmi les auteurs ayant contribué à ce type de méthodes, on peut également citer Hallquist [HS73, Hal76],

qui a étudié le comportement vibratoire de structures soumises à des conditions aux limites arbitraires au moyen de multiplicateurs de Lagrange, Jacquot [Jac76], qui a proposé une méthode utilisant les fonctions de transfert, et Dowel [Dow79], qui utilise une formulation Lagrangienne pour étudier l'influence de l'ajout d'un système masse-ressort sur le comportement dynamique d'une structure.

La méthode proposée ici repose sur les fonctions de transfert ; l'objectif est de suivre l'évolution des fréquences propres d'une structure soumise à des modifications locales. La modification de la structure est modélisée par l'ajout entre deux points d'une impédance mécanique (système décrit à la figure 3.7). Cette modification peut correspondre à un amortisseur visqueux, un ressort, ou toute autre modification pouvant prendre la forme d'une impédance. La méthode peut bien sûr être appliquée dans le cas d'ajout de plusieurs impédances, et traiter le cas de structures amorties ou non.

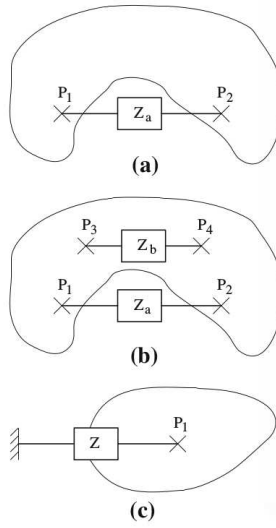


FIGURE 3.7 – Modélisation de la modification de la structure – figure issue de l'article [BBJT12b]

Afin d'étudier l'influence de l'ajout d'une impédance sur le comportement dynamique d'une structure, nous considérons une structure caractérisée par ses matrices de masse \mathbf{M} , de raideur \mathbf{K} et d'amortissement \mathbf{C} . \mathbf{U} et \mathbf{F} sont respectivement les vecteurs déplacement et force. L'équation du mouvement s'écrit :

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{C} + \lambda^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.24)$$

Les fonctions de transfert associées à ce système sont caractérisées par la flexibilité $H(\lambda)$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}(\lambda) \mathbf{F} \quad (3.25)$$

On note $\lambda = \alpha + i\omega$. Par la suite nous considérons que la dépendance en λ de \mathbf{H} est implicite ($\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{H}$). Ainsi, entre deux points P_k et P_l , la fonction de transfert \mathbf{H}_{kl} s'écrit :

$$\mathbf{H}_{kl} = \frac{\mathbf{U}_k}{\mathbf{F}_l} \quad (3.26)$$

où \mathbf{U}_k et \mathbf{F}_l sont respectivement le déplacement et la force suivant la direction définie par le vecteur $\overrightarrow{P_k P_l}$. Pour l'impédance \mathbf{Z} reliant les points P_1 et P_2 de la figure 3.7, on peut donc écrire matriciellement :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

L'impédance \mathbf{Z} relie quant à elle les déplacements \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 à la force \mathbf{F}_1 :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Z}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) \quad (3.28)$$

On peut donc introduire les notations de la matrice \mathbf{H} dans l'expression de l'équation 3.28 :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Z}[(\mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12})\mathbf{F}_1 - (\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21})\mathbf{F}_2] \quad (3.29)$$

On peut alors s'affranchir de \mathbf{F}_2 en utilisant l'équation d'équilibre des forces $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$:

$$[(\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21} - \mathbf{H}_{12}) - \mathbf{Z}^{-1}]\mathbf{F}_1 = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

On obtient alors l'équation déterminantale suivante :

$$\Delta = |\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21} - \mathbf{H}_{12} - \mathbf{Z}^{-1}| = 0 \quad (3.31)$$

L'obtention des valeurs propres de la structure modifiée revient donc à trouver les racines du déterminant Δ .

Si l'on désire maintenant ajouter plusieurs impédances, la méthode qui vient d'être décrite s'applique de la même manière. Dans le cas de deux impédances entre les points P_1 et P_2 et entre les points P_3 et P_4 , la matrice de sensibilité \mathbf{H} s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} & \mathbf{H}_{14} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} & \mathbf{H}_{24} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} & \mathbf{H}_{34} \\ \mathbf{H}_{41} & \mathbf{H}_{42} & \mathbf{H}_{43} & \mathbf{H}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

On note \mathbf{Z}_a l'impédance entre les points P_1 et P_2 et \mathbf{Z}_b l'impédance entre les points P_3 et P_4 . Les équations correspondantes s'écrivent :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Z}_a(\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{Z}_b(\mathbf{U}_3 - \mathbf{U}_4) \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Comme pour l'ajout d'une unique impédance, on obtient un système matriciel en $\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_3 \end{Bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{aa} - \mathbf{Z}_a^{-1} & \mathbf{T}_{ab} \\ \mathbf{T}_{ba} & \mathbf{T}_{bb} - \mathbf{Z}_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

avec les notations suivantes :

$$\mathbf{T}_{aa} = \mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21} - \mathbf{H}_{12} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{T}_{ab} = \mathbf{H}_{13} + \mathbf{H}_{24} - \mathbf{H}_{23} - \mathbf{H}_{14} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{T}_{bb} = \mathbf{H}_{33} + \mathbf{H}_{44} - \mathbf{H}_{43} - \mathbf{H}_{34} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{T}_{ba} = \mathbf{H}_{31} + \mathbf{H}_{42} - \mathbf{H}_{41} - \mathbf{H}_{32} \quad (3.39)$$

Le suivi des fréquences propres du système se fait donc en annulant le déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_{aa} - \mathbf{Z}_a^{-1} & \mathbf{T}_{ab} \\ \mathbf{T}_{ba} & \mathbf{T}_{bb} - \mathbf{Z}_b^{-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.40)$$

ce qui revient à résoudre l'équation :

$$(\mathbf{T}_{aa} - \mathbf{Z}_a^{-1})(\mathbf{T}_{bb} - \mathbf{Z}_b^{-1}) - \mathbf{T}_{ab}\mathbf{T}_{ba} = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

D'autres cas d'impédances sont traités dans [BBJT12b].

3.2.4 Résultats expérimentaux et numériques

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus dans le cadre de l'étude du comportement dynamique d'un lanceur spatial EADS, dans le but de concevoir une technique d'amortissement des modes les plus gênants.

Pour ce faire, nous utilisons les deux méthodes décrites aux sections 3.2.2 et 3.2.3. L'étude décrite ici est numérique et expérimentale. Une maquette du lanceur est réalisée, ainsi que le modèle éléments finis correspondant (cf. figure 3.6 et tableau 3.1). La structure est donc composée d'un étage de lanceur et d'une charge utile montée sur trois colonnettes. Il y a donc deux sous-structures distinctes, l'étage et la charge utile, géométrie qui se prête particulièrement bien à la technique de double synthèse modale évoquée à la section 2.2.1. L'étude a été réalisée de la façon suivante :

1. Modélisation EF de la maquette :
 - conception d'après un cahier des charges fonctionnel défini par EADS ;
 - modélisation sous ANSYS et SDTools ;
 - définition des sous-structures.
2. Mise en place de la double synthèse modale :
 - modes de l'étage ;
 - modes de la charge utile ;
 - modes de branche.
3. Mise en place de la méthode déterminantale de suivi des valeurs propres :

- avantage : la base modale n'est calculée qu'une fois ;
- détermination des valeurs optimales de raideur et d'amortissement des impédances ajoutées à la structure.

Évolution des valeurs propres de la structure

Nous considérons maintenant la structure de lanceur de la figure 3.6, avec les caractéristiques du tableau 3.1. Le modèle éléments finis comporte 11100 degrés de liberté pour l'étage, auxquels s'ajoutent 1550 degrés de liberté pour la charge utile. En premier lieu, on utilise la double synthèse modale pour réduire le nombre de degrés de liberté de la structure. Celle-ci est décomposée en deux sous-structures, l'étage et la charge utile. Nous nous intéressons aux quatre premiers modes de la structure assemblée. Le premier mode est le mode de flexion de la charge utile. Le second mode est le mode de flexion de la virole interne. Le troisième mode est un mode longitudinal pour lequel la charge utile et le lest bougent en phase verticalement. Le quatrième mode est également un mode longitudinal, mais antisymétrique.

C'est le second mode que nous allons principalement amortir. Pour ce faire, trois liaisons sont ajoutées entre le lest et la virole externe. Ces liaisons sont dissipatives, d'amortissement visqueux c . Du fait de l'emplacement des dissipateurs, c'est effectivement le deuxième mode qui est impacté. Les trois autres sont légèrement amortis.

Les résultats du suivi des valeurs propres en fonction de c sont donnés à la figure 3.8. La figure 3.9 montre l'évolution de la partie réelle des valeurs propres en fonction de l'amortissement c . Il apparaît que la valeur optimale de c n'est pas la même pour tous les modes.

On considère maintenant le lanceur équipé des trois liaisons entre le lest et la virole extérieure. Ces liaisons sont composées d'un ressort de raideur k monté en série avec l'amortisseur de valeur c . La figure 3.10 montre l'évolution de la seconde valeur propre du système. Les courbes bleues représentent cette évolution pour une valeur de c variant de zéro (pôle initial marqué d'une croix \times) à l'infini (valeur correspondant à la pulsation "bloquée", marquée d'un cercle \circ), la valeur de k étant fixée. Les courbes rouges correspondent quant à elles à l'évolution de la valeur propre pour une valeur de c fixée et une valeur de k décroissant de l'infini à 0.

Conception d'un système d'amortissement par frotteur

La technique de suivi de la section précédente est utilisée pour définir les caractéristiques optimales de l'amortisseur frottant à dimensionner. Pour des raisons de coût et de mise en œuvre, nous avons effectué cette étude en ne considérant qu'une liaison lest-virole au lieu des trois décrites dans les sections précédentes. Les résultats de cette étude sont publiés dans un article lié à la thèse de Denis Brizard [BBJT12a].

Les simulations numériques effectuées lors de l'application de la méthode déterminantale sur le lanceur ont permis de déterminer les valeurs optimales de c et k dans le cas d'un amortissement visqueux. Pour différentes raisons, c'est un amortisseur frottant qui a été retenu pour la maquette EADS. Le dimensionnement de ce frotteur est

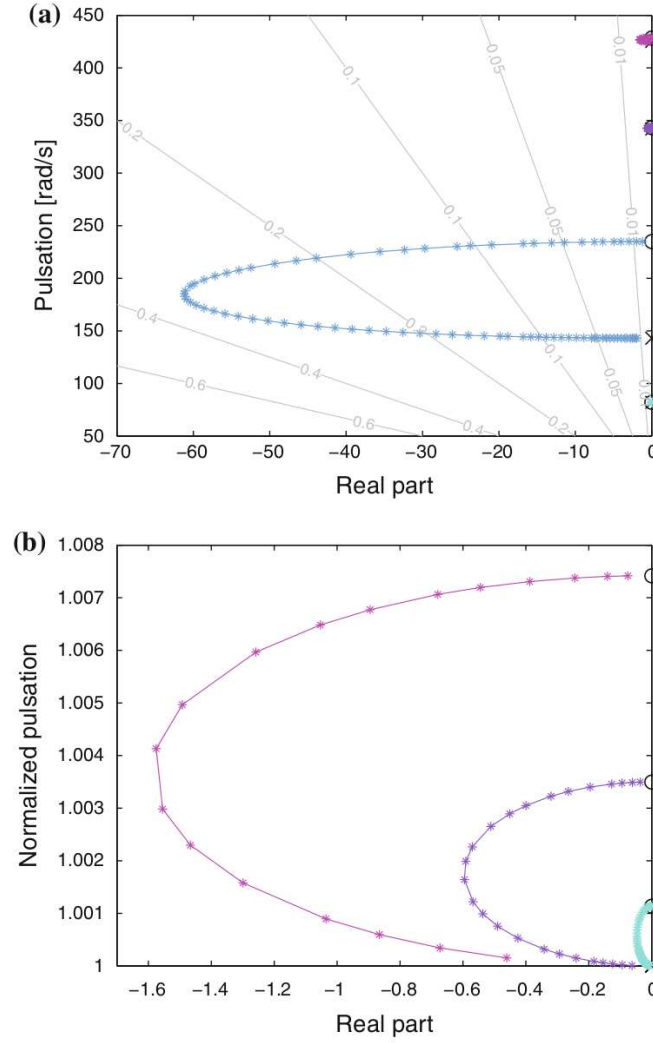


FIGURE 3.8 – Évolution, dans le plan complexe, des 4 premières valeurs propres de la structure. **(a)** : vision globale des 4 modes, — courbes d’iso-amortissement modal, × pôles, ○ zéros. **(b)** : détail des 3 modes les moins amortis. Figure issue de l’article [BBJT12b].

donc basé sur l’énergie équivalente dissipée par l’amortisseur visqueux utilisé pour les calculs.

L’amortissement modal le plus élevé est obtenu pour une valeur $c_{eq} = 1,1 \times 10^5 \text{ Nsm}^{-1}$. L’énergie dissipée correspondante pour un déplacement périodique imposé U_0 est donc :

$$W_c = \pi c_{eq} \omega U_0^2 \quad (3.42)$$

Nous cherchons maintenant à modéliser le dissipateur frottant. Nous utilisons pour cela une raideur k_f et un élément frottant intégrant une force de glissement F_g .

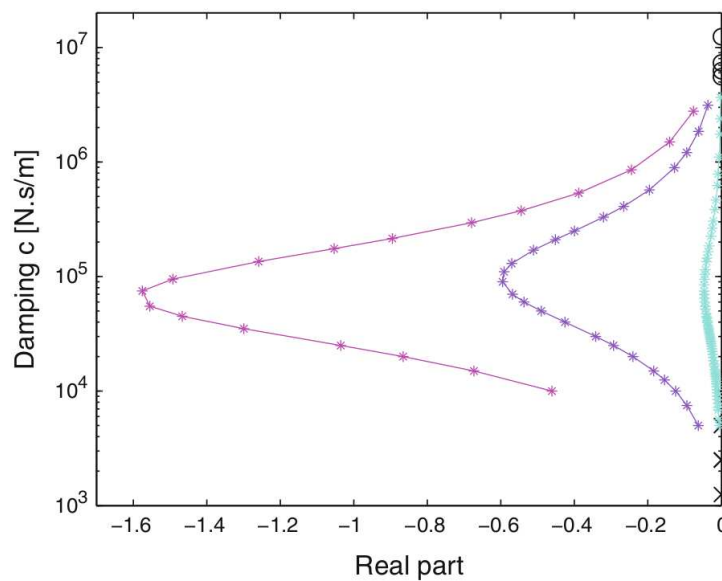


FIGURE 3.9 – Évolution de la partie réelle des valeurs propres de la structure en fonction de l'amortissement c . Figure issue de l'article [BBJT12b].

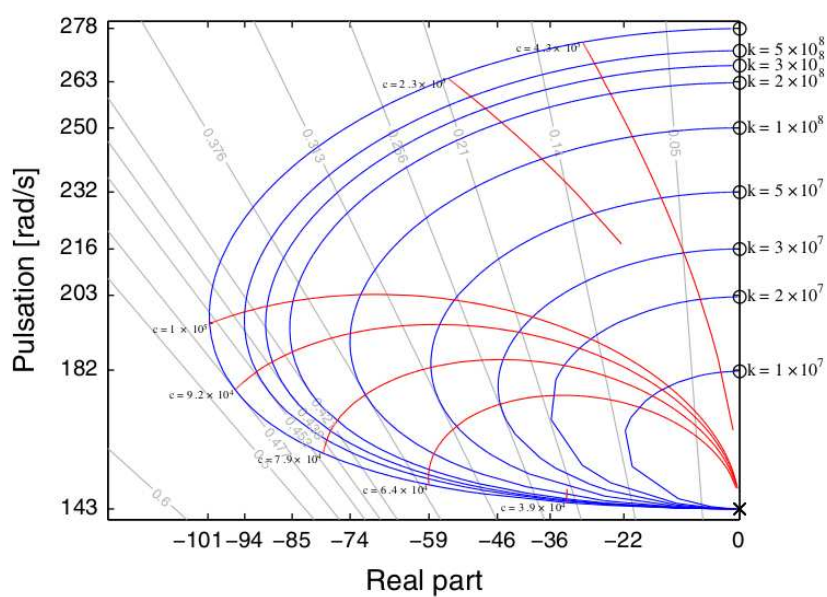


FIGURE 3.10 – Évolution, dans le plan complexe, de la seconde valeur propre en fonction de k et c . Figure issue de l'article [BBJT12b].

L'énergie dissipée par un tel dissipateur est illustrée à la figure 3.11. L'énergie dissipée par le frotteur s'écrit :

$$W_f = 4F_g U_0 \left(1 - \frac{F_g}{k_f U_0} \right) \quad (3.43)$$

Cette énergie atteint un maximum pour $F_g^{\text{opt}} = \frac{1}{2}k_f U_0$. L'énergie dissipée est alors $W_f^{\text{max}} = k_f U_0^2$. Si l'on cherche à obtenir $W_f^{\text{max}} = W_c$, on obtient la valeur de la raideur k_f :

$$k_f^{\text{opt}} = \pi c_{\text{eq}} \omega \quad (3.44)$$

Aux alentours de 20 Hz on a donc $k_f^{\text{opt}} = 4,3 \times 10^7 \text{ Nm}^{-1}$. Le déplacement relatif U_0 est estimé autour de 1 mm, ce qui donne une valeur de la force de glissement optimale $F_g^{\text{opt}} = 2 \times 10^4 \text{ N}$. Ces valeurs sont utilisées pour le dimensionnement du frotteur dont le dessin du prototype est donné à la figure 3.12.

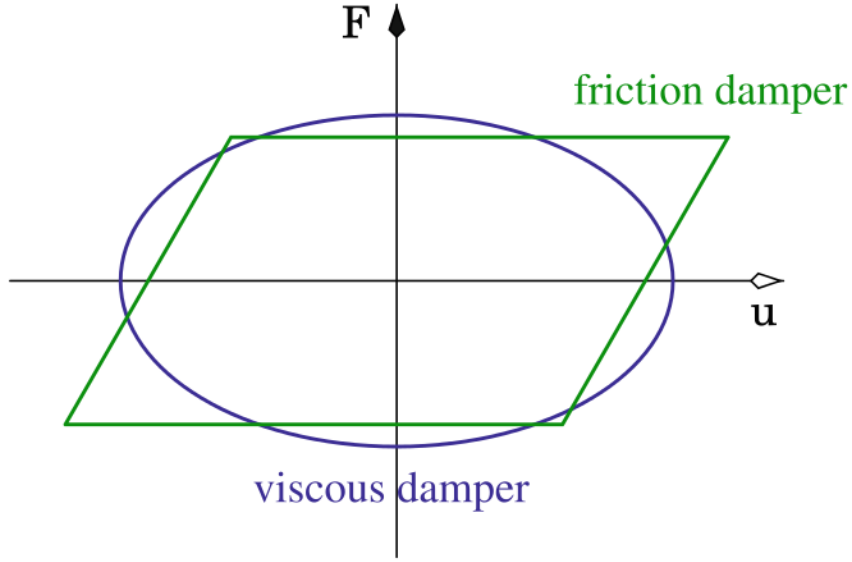


FIGURE 3.11 – Comparaison des diagrammes force-déplacement pour les dissipateur frottant et visqueux. Figure issue de l'article [BBJT12a].

Le frotteur ainsi dimensionné est ensuite testé expérimentalement. Les résultats expérimentaux sont disponibles dans la thèse de Denis Brizard [Bri11] et dans l'une des publications associées [BBJT12a].

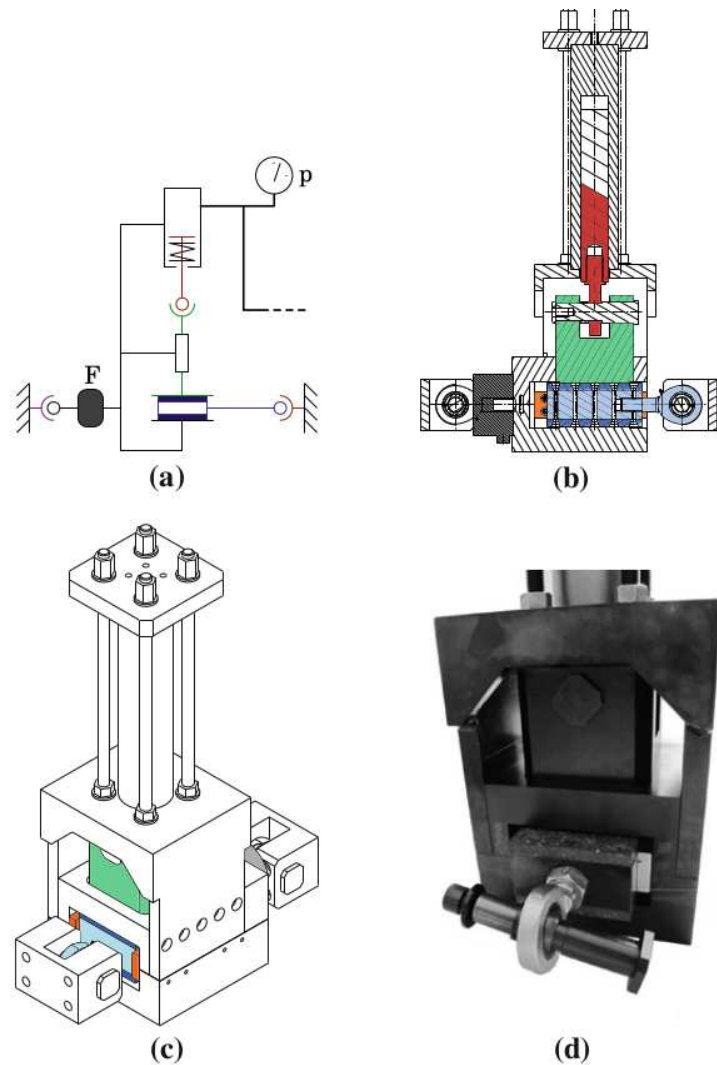


FIGURE 3.12 – Prototype de l’amortisseur frottant. (a) schéma de principe (F est un capteur de force, p est une jauge de pression) ; (b) vue en coupe ; (c) vue isométrique ; (d) photo. Figure issue de l’article [BBJT12a].

3.3 Réduction de niveaux de bruit

Dans cette section, nous utilisons la triple synthèse modale associée à une technique d'optimisation développée dans le cadre de la thèse de Sophie Bourmich [Bou12]. L'objectif de l'étude consiste à optimiser la forme d'un assemblage constitué de plusieurs sous-structures et d'une cavité d'air. L'optimisation effectuée est simple et repose sur les étapes suivantes :

- triple synthèse modale du système fluide-structure ;
- optimisation des formes modales (optimisation fonctionnelle) sous critères vibro-acoustiques ;
- optimisation de forme de la structure (optimisation organique).

3.3.1 Modèle étudié

Le modèle étudié ici est la cavité représentée à la figure 3.13. Ce modèle, très simple, a tout de même pour objectif de respecter la composition d'un véhicule et comprend donc une plaque, deux brancards et trois traverses ainsi qu'une cavité remplie d'air. La plaque est au dessus de la cavité, les autres parois sont infiniment rigides. Les caractéristiques de cette structure sont indiquées dans le tableau 3.2.

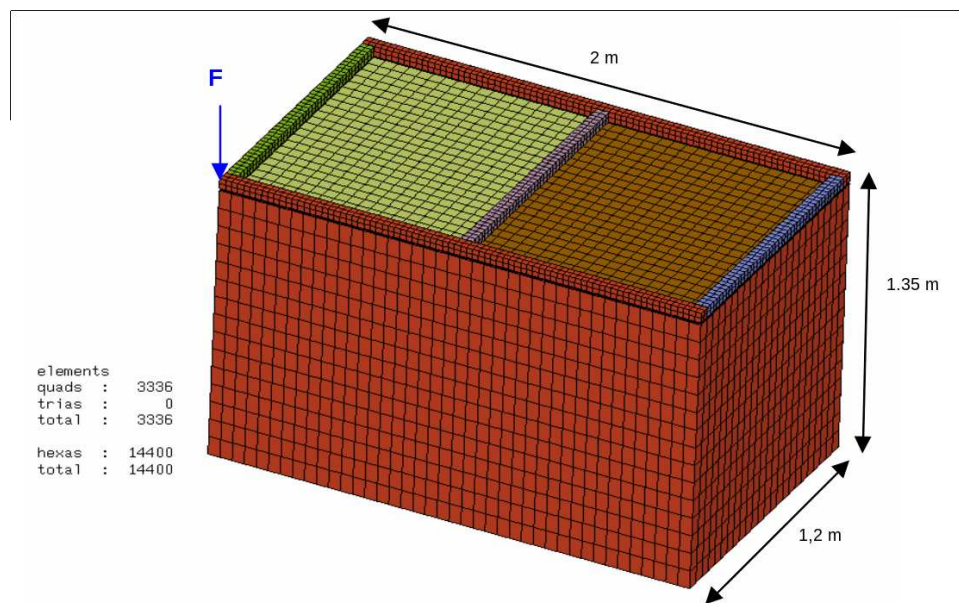


FIGURE 3.13 – Modèle simple utilisé pour l'optimisation de forme. Figure issue de la thèse de Sophie Bourmich [Bou12].

3.3.2 Optimisation de la structure

L'optimisation de la structure se fait au moyen des critères vibro-acoustiques développées dans ma thèse de doctorat [Bes06] et améliorés lors de la thèse de Sophie

3 Applications pratiques

Sous-structure	Matériau	Longueur	Épaisseur	Largeur
Plaque	$E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa $\nu = 0,3$ $\rho = 7,8 \times 10^6$ kgm ⁻³	2 m	0,0915 mm	1,2 m
Brancards	$E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa $\nu = 0,3$ $\rho = 7,8 \times 10^6$ kgm ⁻³	2 m	0,67 mm	50 mm
Traverse avant	$E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa $\nu = 0,3$ $\rho = 7,8 \times 10^6$ kgm ⁻³	2 m	0,67 mm	50 mm
Traverse arrière	$E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa $\nu = 0,3$ $\rho = 7,8 \times 10^6$ kgm ⁻³	2 m	0,67 mm	50 mm
Traverse milieu	$E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa $\nu = 0,3$ $\rho = 7,8 \times 10^6$ kgm ⁻³	1,2 m	0,67 mm	50 mm
Cavité	$\rho = 1,25 \times 10^9$ kgm ⁻³ $c = 345$ ms ⁻¹	2 m	1,2 mm	1,35 m

TABLE 3.2 – Caractéristiques de la structure étudiée. Tableau issu de la thèse de Sophie Bourmich [Bou12].

Bourmich [Bou12]. Il s’agit d’une optimisation hiérarchique comportant plusieurs étapes :

1. Définition des bruits à traiter :
 - “booming noise” : c’est le bruit de bourdonnement, le plus gênant pour les occupants d’un véhicule. Il s’agit d’un bruit sourd aux basses fréquences, entre 30 et 200 Hz, suivant le deuxième harmonique de rotation du moteur sur un quatre cylindres en ligne ($f = 100$ Hz à 3000 tr.min⁻¹) ;
 - “road noise” : c’est le bruit de roulement, dominant dès 50 km.h⁻¹, qui dépend beaucoup de la chaussée.
2. Spécifications fonctionnelles :
 - couplage de fréquences ;
 - flexibilités effectives ;
 - transmissibilités effectives.
3. Spécifications organiques :
 - inerties et épaisseurs ;
 - surfaces et formes ;
 - amortissement.

Le modèle étudié est modélisé par éléments finis et soumis à la triple synthèse modale. Le modèle résultant reste précis jusqu’à la fréquence de 200 Hz, ce qui satisfait nos besoins, au niveau du bourdonnement notamment.

L'algorithme utilisé pour l'optimisation est un algorithme SQP modifié, développé dans le cadre de la thèse de Sophie Bourmich [Bou12]. Les performances de cet algorithme sur le problème considéré sont consignées dans le tableau 3.3.

Type d'algorithme	Valeur de la fonction objectif	Temps d'exécution	Nombre d'itérations	Nombre d'évaluations de la fonction
SQP standard	54,84	12 min	51	11308
SQP modifié	54,94	22 s	14	555

TABLE 3.3 – Performances de l'algorithme SQP modifié. Tableau issu de la thèse de Sophie Bourmich [Bou12].

Les figures 3.14 et 3.15 montrent les résultats de l'optimisation réalisée.

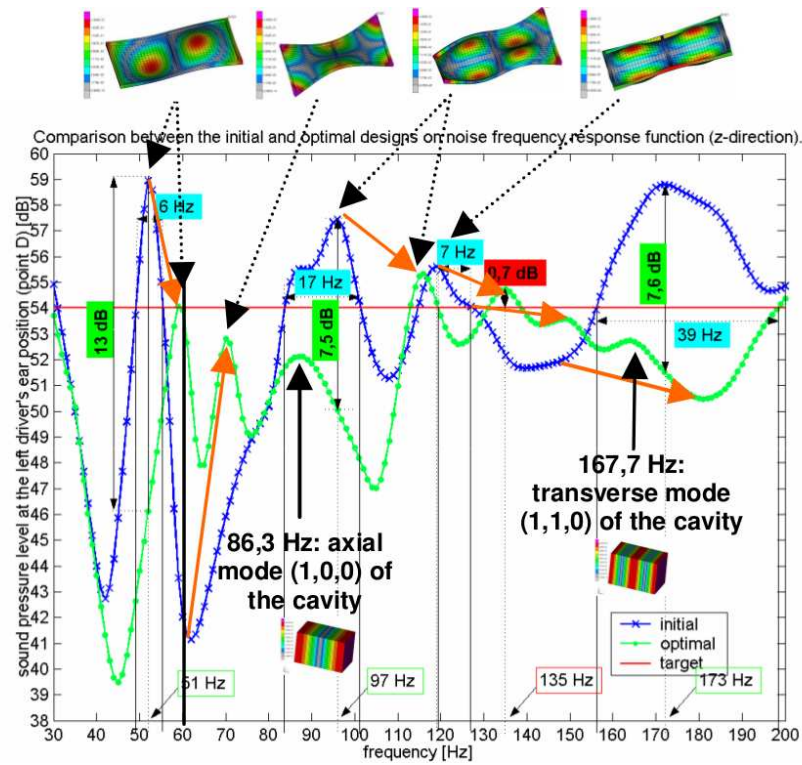


FIGURE 3.14 – Fonctions de transfert avant (en vert) et après (en bleu) optimisation. Figure issue de la thèse de Sophie Bourmich [Bou12].

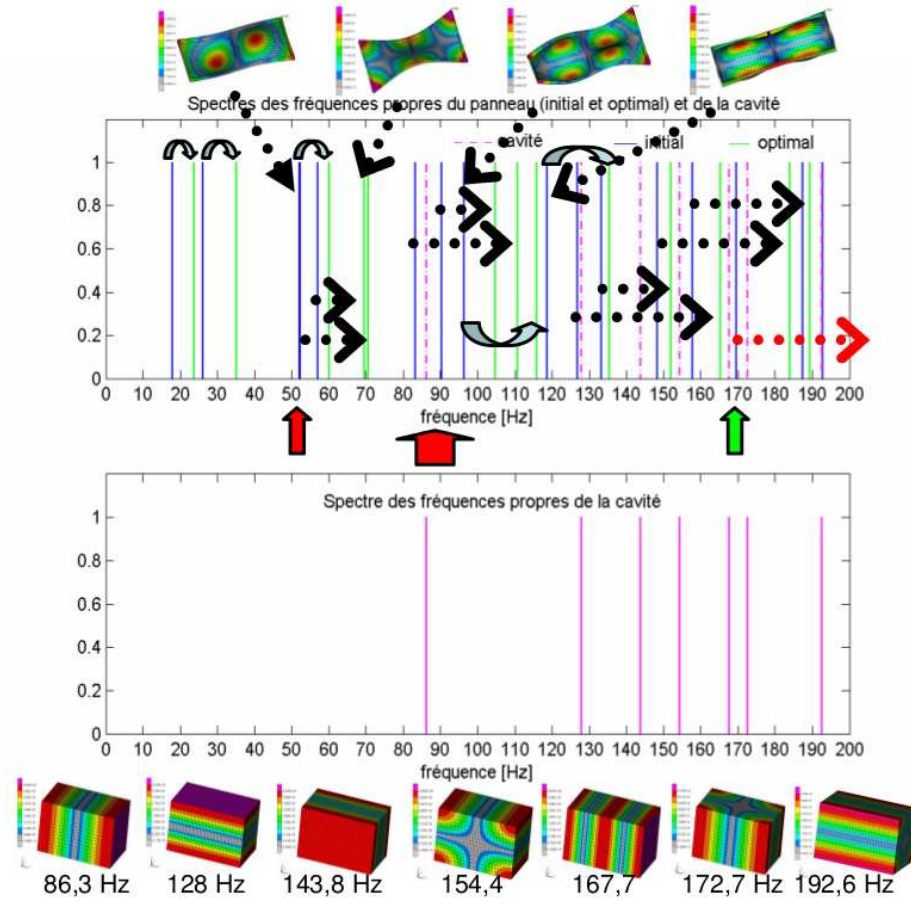


FIGURE 3.15 – Fréquences propres du système avant (en bleu) et après (en vert) optimisation. Les fréquences propres de la cavité sont en rose. Figure issue de la thèse de Sophie Bourmich [Bou12].

4 Bilan de la première partie

Dans cette première partie sont résumés les principaux travaux réalisés depuis ma thèse de doctorat sur la thématique “vibro-acoustique” utilisant des méthodes basées sur les champs de déplacements. Il s’agit essentiellement de méthodes de synthèse modale adaptées aux problématique de l’optimisation des structures sous critères vibro-acoustiques. Parmi les principaux apports des travaux effectués, on peut noter en particulier :

- l’adaptation des méthodes de synthèse modale généralisée au problématiques d’optimisation, et leur application à la réduction du bruit dans l’industrie automobile ;
- la prise en compte des incertitudes dans l’élaboration de critères d’optimisation ;
- l’utilisation de la double synthèse modale dans le cadre de la conception d’un étage de lanceur spatial ;
- la mise en place d’une méthode originale de suivi des valeurs propres (méthode déterminantale).

Il subsiste néanmoins un certain nombre de points qui mériteraient d’être approfondis lors de travaux ultérieurs :

- l’adaptation des méthodes de réduction de l’interface (double synthèse modale) aux structures comportant des non-linéarités (ces travaux sont en cours) ;
- la mise en place de critères permettant d’évaluer *a priori* la convergence des modes de branche (avant leur calcul) ;
- l’adaptation de la méthode déterminantale au contrôle semi-actif des structures complexes comprenant des non-linéarités fortes.

Rappelons que les travaux présentés ici n’auraient pu se faire sans la participation active des doctorants Sophie Bourmich et Denis Brizard.

Deuxième partie

Approche énergétique

5 Introduction

Dans cette partie nous traitons des méthodes dites *énergétiques*, qui ne sont pas basées sur le champ de déplacement des structures mais sur des quantités énergétiques qui leur sont liées. L'utilisation de telles méthodes répond à des besoins en terme de coûts de calcul, mais se révèle également suffisante si le recouvrement modal, dans la bande de fréquence considérée, est trop important pour que soient mises à profit les informations fournies par une méthode cinématique.

Parmi les principales méthodes énergétiques, on ne peut échapper à la SEA (Statistical Energy Analysis) [bib75]. Cette méthode permet de calculer l'énergie de plusieurs sous-systèmes constituant un système plus important. Nefske et Sung [bib87] ont étendu cette approche et proposé une formulation qui considère l'*énergie locale* dans le système – la précision est donc accrue.

La méthode utilisée dans ce chapitre, baptisée Méthode Énergétique Simplifiée (MES), découle de ces travaux. Elle a été longuement étudiée dans le cadre de plusieurs thèse au laboratoire LTDS [Mor98, Har05, Sch04] et a fait l'objet de plusieurs publications [HIJT09, IJ96, IBJ01].

Ce chapitre a pour objectif de présenter quelques travaux concernant la MES. Cette méthode étant arrivée à maturité avec les thèses de Pierre Hardy [Har05] et Thierry Schmitt [Sch04], mes recherches ne concernent pas la formulation de la méthode elle-même. Il s'agit plutôt d'un outil reformulé pour servir des problématiques liées à l'optimisation des systèmes et aux méthodes inverses.

Dans ce cadre, cette partie est construite de la façon suivante :

- le chapitre 6 rappelle les principes de la MES, pour la plupart émises et publiées par d'autres, mais qui sont ici formulés de manière à être aisément intégrés dans un problème d'optimisation ;
- le chapitre 7 décrit les différentes applications utilisant les formulations décrites au chapitre 6. Il s'agit des problèmes de détection de sources (thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10]) et d'optimisation des structures, comprenant ou non du fluide.

Il s'agit donc davantage d'applications d'une méthode existante que de recherche pure, mais ce chapitre a également pour but d'amener la troisième partie de ce mémoire, consacrée aux méthodes “mixtes”. Les publications relatives à cette partie sont les suivantes :

- dans le cadre de la thèse de Mohammed Chabchoub : [CBI11a, CBI11b] ;
- dans le cadre de l'ANR JCJC MoSiRoLaMi, en collaboration avec Frédéric Gillot et Renata Troian : [TBG14a, TBG14b] ;
- dans le cadre de travaux personnels : [BI11].

6 Méthode Énergétique Simplifiée

Ce chapitre a pour but de rappeler les différentes équations de la MES telles qu'elles seront utilisées pour les applications du chapitre 7 et pour les formulations mixtes de la troisième partie de ce mémoire. La méthode "directe", permettant le calcul de la densité d'énergie et de l'intensité acoustique, est présentée dans un premier temps, pour les cas 2D et 3D. La formulation inverse du problème est ensuite abordée.

6.1 Méthode directe

La Méthode Énergétique Simplifiée (MES) permet de décrire le comportement d'un système au moyen de deux quantités énergétiques. La première, la densité d'énergie notée W , est définie comme la somme des énergies potentielle et cinétique. La seconde est l'intensité notée \vec{I} . Les équations de la MES sont obtenues en écrivant l'équilibre énergétique. Il existe plusieurs façons de présenter ces équations, et il existe "plusieurs MES", dans le sens où les équations peuvent différer selon les hypothèses consenties ou les ondes considérées. On trouvera une revue exhaustive de toutes les formulations existantes dans les travaux de Pierre Hardy [Har05] et Thierry Schmitt [Sch04]. Dans ce mémoire ne sont décrites que les formulations utiles aux applications effectuées.

La relation d'équilibre énergétique d'un système s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{I} + \pi_{\text{diss}} = \pi_{\text{entr}} \quad (6.1)$$

où π_{diss} est la densité de puissance dissipée et π_{entr} la densité de puissance entrante. Comme pour la SEA, on admet une relation entre la puissance dissipée et la densité de puissance W :

$$\pi_{\text{diss}} = \eta \omega W \quad (6.2)$$

où η représente l'amortissement du milieu et ω la pulsation.

Dans le cadre des hypothèse de la MES, on admet que les champs W et \vec{I} sont composés d'un champ direct et d'un champ réverbéré, ce qui se traduit par les équations suivantes :

$$W = W^{\text{dir}} + W^{\text{rev}} \quad (6.3)$$

$$\vec{I} = \vec{I}^{\text{dir}} + \vec{I}^{\text{rev}} \quad (6.4)$$

Moyennant ces dernières équations, on peut écrire l'équation fondamentale de la MES :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{I} + \eta\omega W = \pi_{\text{entr}} \quad (6.5)$$

L'équation homogène associée (i.e. sans second membre) s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{I} + \eta\omega W = 0 \quad (6.6)$$

Pour résoudre cette équation, deux grandes méthodes existent, qui entraînent chacune certaines hypothèses supplémentaires, notamment vis-à-vis du type d'ondes considérées.

Dans ce mémoire, nous traiterons la partie 2D avec les équations de la MES différentielle, et la partie 3D avec les équations de la MES intégrale.

6.1.1 En deux dimensions – structures

Équations fondamentales

Les équations décrites ici concernent le cas d'une structure 2D, par exemple une plaque. On suppose que les champs \vec{I} et W se décomposent dans toutes les directions (i.e. $W = \int W(\vec{n})$ et $\vec{I} = \int \vec{I}(\vec{n})$), ce qui est plus délicat à affirmer pour la puissance entrante (c'est pourquoi nous raisonnons ici avec l'équation homogène 6.6). On admet une hypothèse forte concernant la relation entre l'intensité et la densité d'énergie pour une direction donnée \vec{n} , relation faisant intervenir la vitesse des ondes c et valable pour une onde plane propagative :

$$\vec{I}(\vec{n}) = cW(\vec{n})\vec{n} \quad (6.7)$$

où c est la vitesse de groupe des ondes. On considère alors l'équation homogène associée à l'équation 6.5, toujours suivant une direction \vec{n} , et l'on remplace $\vec{I}(\vec{n})$ en utilisant l'équation 6.7 :

$$c\vec{\nabla}W(\vec{n}) \cdot \vec{n} + \eta\omega W(\vec{n}) = 0 \quad (6.8)$$

On peut aussi écrire :

$$c\vec{\nabla}W(\vec{n}) \cdot \vec{n} + \frac{\eta\omega}{c}\vec{I}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (6.9)$$

Si l'on fait la somme des différentes composantes de \vec{I} et W dans les différentes directions, on obtient une relation entre W et \vec{I} :

$$\vec{I} = -\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla W \quad (6.10)$$

On peut alors injecter l'équation 6.10 dans l'équation 6.6 pour obtenir l'équation de diffusion en W :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W + \eta\omega W = 0 \quad (6.11)$$

Si l'on souhaite faire intervenir une puissance entrante, on peut l'ajouter à ce stade, en étant conscient que toutes les conditions ne sont pas réunies pour que les résultats obtenus soient précis. Il s'agit alors de l'équation de diffusion inhomogène :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W + \eta\omega W = \pi_{\text{entr}} \quad (6.12)$$

Cette formulation présente l'avantage de pouvoir être facilement discrétisée par éléments finis puisqu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles classique en W .

Discrétisation des équations

Pour effectuer la discrétisation par éléments finis, on réécrit l'équation 6.12 de la façon suivante :

$$-\Delta W + \frac{\eta^2}{c^2}\omega^2 W = \frac{\eta}{c^2}\omega\pi_{\text{entr}} \quad (6.13)$$

Équation qui se discrétise aisément en introduisant les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sous la forme :

$$(-\omega^2 b \mathbf{M}_w + \mathbf{K}_w) \mathbf{W} = \mathbf{F}_\pi \quad (6.14)$$

avec $b = \frac{\eta^2}{c^2}$. \mathbf{W} et \mathbf{F}_π sont respectivement les vecteurs associés à W et π_{entr} . Précisons que \mathbf{M} et \mathbf{K} ne sont pas des matrices de masse et de raideur ; nous les notons ainsi en raison de l'analogie de l'équation 6.14 avec l'équation du mouvement classique rencontrée dans les problèmes de dynamique.

6.1.2 En trois dimensions – acoustique

Dans le cas d'un problème d'acoustique en trois dimensions, c'est la version intégrale de la MES que nous allons utiliser. Pour cela on décrit le champ sous forme d'ondes sphériques décorréées. On note donc $W = W(r)$ et $\vec{I} = I(r)\vec{u}_r$. Comme pour la résolution classique d'un problème par méthode intégrale, on considère l'équation fondamentale de la MES (équation 6.5) pour une source de puissance unitaire :

$$\vec{\nabla} I(r) \cdot \vec{u}_r + \eta\omega W(r) = \delta(r) \quad (6.15)$$

En champ lointain, on peut considérer que les ondes sphériques vérifient l'équation 6.11, en principe valable pour les ondes planes uniquement. Cette hypothèse de champ lointain permet d'exprimer l'équation 6.15 en fonction d'une unique grandeur énergétique W :

$$c\vec{\nabla} G(r) \cdot \vec{u}_r + \eta\omega W(r) = \delta(r) \quad (6.16)$$

Pour un problème 3D, on peut spécifier les expressions des dérivées :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 W(r)) + \frac{\eta\omega}{c} W(r) = \frac{\delta(r)}{c} \quad (6.17)$$

La solution générale de cette équation est le noyau de Green $G(r)$ qui s'écrit :

$$G(r) = A \frac{e^{-\frac{\eta\omega}{c}r}}{r^2} \quad (6.18)$$

On détermine la constante A en supposant $\eta \rightarrow 0$:

$$G(r) = \frac{1}{4\pi c} \frac{e^{-\frac{\eta\omega}{c}r}}{r^2} \quad (6.19)$$

On utilise alors $G(r)$ pour exprimer W et \vec{I} . Pour le champ direct $(W^{\text{dir}}, \vec{I}^{\text{dir}})$, la seule source considérée est la puissance entrante. Dans ce mémoire, on ne traite que le cas des sources surfaciques (aux frontières). On peut ainsi écrire :

$$W^{\text{dir}}(M) = \int_S \left(d(P) G(\vec{PM}) \pi(P) \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS \quad (6.20)$$

$$\vec{I}^{\text{dir}} = \int_S \left(cd(P) G(\vec{PM}) \pi(P) \vec{u} \cdot \vec{n} \right) \vec{u} dS \quad (6.21)$$

où $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|}$ et \vec{n} est le vecteur normal à la surface au point P . P est un point qui parcourt la surface S (c'est la variable d'intégration). $d(P)$ est la directivité de flux au point P .

Pour ce qui est du champ réverbéré $(W^{\text{rev}}, \vec{I}^{\text{rev}})$, il faut prendre en compte les réflexions aux surfaces qui génèrent des "sources fictives" que nous noterons σ :

$$W^{\text{rev}}(M) = \int_S \left(d(P) G(\vec{PM}) \sigma(P) \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS \quad (6.22)$$

$$\vec{I}^{\text{rev}} = \int_S \left(cd(P) G(\vec{PM}) \sigma(P) \vec{u} \cdot \vec{n} \right) \vec{u} dS \quad (6.23)$$

Reste à exprimer σ . Ce qui se fait en écrivant un bilan d'énergie en un point de la surface, ici noté M :

$$\begin{aligned} \sigma(M) &= (1 - \alpha(M)) (W^{\text{dir}}(M) + W^{\text{rev}}(M)) \\ &= (1 - \alpha(M)) \left(\int_S \left(d(P) G(\vec{PM}) \pi_{\text{entr}}(P) \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS \right. \\ &\quad \left. + \int_S \left(d(P) G(\vec{PM}) \sigma(P) \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS \right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Où $\alpha(P)$ est le coefficient d'absorption au point P. Cette dernière équation fait apparaître σ à plusieurs endroits, ce qui occasionne des difficultés de résolution ; nous allons donc passer par la discrétisation du problème. La surface entourant le fluide est divisée en N facettes. Une facette n est caractérisée par ses valeurs $(\sigma^n, \alpha^n, \pi_{\text{entr}}^n)$. On opte pour la notation matricielle suivante :

$$\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} = \{\pi_{\text{entr}}^1, \pi_{\text{entr}}^2, \dots, \pi_{\text{entr}}^N\}^T \quad (6.25)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^N \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \{\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^N\}^T \quad (6.27)$$

L'équation 6.24 peut s'écrire :

$$\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} + \mathbf{\Sigma}) \quad (6.28)$$

Ce qui permet d'écrire $\mathbf{\Sigma}$ en fonction de $\mathbf{\Pi}_{\text{entr}}$:

$$\mathbf{\Sigma} = ([\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} \quad (6.29)$$

Il est alors possible de discrétiser les équations 6.22 et 6.23 :

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{B}\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} + \mathbf{B}\mathbf{\Sigma} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} + \mathbf{B}([\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} \\ &= \mathbf{Z}_w\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Où \mathbf{W} est le vecteur des densités d'énergie. On définit et on discrétise de la même manière un vecteur $\vec{\mathbf{I}}$ qui correspond aux intensités projetées selon une direction donnée.

6.2 Méthodes inverses

L'inversion des formulations décrites au chapitre 6.1 est aisée dès lors que l'on considère le problème sous sa forme matricielle. Pour les problèmes de plaques évoqués au chapitre 6.1.1, il suffit d'inverser la matrice $(-\omega^2 b\mathbf{M} + \mathbf{K})$ définie à l'équation 6.14. Pour les problèmes acoustiques décrits au chapitre 6.1.2, on inversera la matrice \mathbf{Z} définie à l'équation 6.30.

Les matrices à inverser ne sont cependant pas toujours inversibles, auquel cas on a recourt à des matrices pseudo-inverses. Les inversions de problèmes énergétiques ont fait l'objet de la thèse de Pierre Hardy [Har05].

7 Applications pratiques

Ce chapitre a pour objectif de détailler les travaux utilisant la MES :

- la **détection de sources** est une application de la MES dans le cadre des problèmes de méthodes inverses. Il peut s’agir de détecter des sources appliquées sur une surface (plaque) plus ou moins complexe, ou encore un flux de puissance entrante dans une cavité acoustique. Ces travaux, fortement inspirés des travaux de Pierre Hardy [Har05], ont donné lieu à la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10]. Dans cette catégorie de problèmes, nous classons également les problèmes de détection de défauts ;
- dans le cadre des problèmes d’**optimisation des structures**, nous décrivons ensuite le cas de l’optimisation de la répartition de matériaux poreux sur les parois d’une cavité, puis le cas de l’optimisation de forme d’une cavité du même type, traité dans le cadre du projet ANR MoSiRoLaMi par la post-doctorante Rénata Troian [TBG14b].

7.1 Détection de sources

L’identification de sollicitations appliquées à une structure est un sujet important qui intéresse bien des chercheurs. En effet, la détermination de l’emplacement et de l’amplitude d’une force est relativement complexe à effectuer. De nombreux auteurs se sont penchés sur la question [LMKL00, MCL03, JL00, PG00, MCDG07, CPP09, PG99, Noi70, Pav76, HDG02, Bai49]. On trouve généralement deux types d’approche pour ce type de problème. Dans les références [LMKL00] et [MCL03] par exemple, l’auteur utilise une méthode inverse qui repose sur la connaissance de la dynamique de système sous forme de “boîte noire”, associée à un filtre de Kalman qui permet des résultats corrects en présence de mesures bruitées. La seconde approche consiste à rechercher les forces fictives permettant au champ mesuré d’être cohérent avec les équations d’équilibre de la structure. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode RIFF [PG00, MCDG07, CPP09] d’identification de sources vibratoires.

La plupart des méthodes existantes sont cependant valables pour une bande de fréquences restreinte, et essentiellement en basses fréquences. En moyennes et hautes fréquences, ces méthodes perdent donc de leur intérêt ; c’est alors qu’il est envisageable d’utiliser la MES. Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas d’une plaque, dans le cadre d’un problème purement structural. Nous envisageons ensuite le cas d’une structure 3D.

Cas d'une plaque

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode MES inverse formulée au chapitre 6.2. Nous effectuons ici plusieurs simulations numériques visant à vérifier et quantifier la validité de la méthode. Trois types de simulations sont effectuées ; elles sont rappelées dans le tableau 7.1 :

- la simulation **MES / IMES** permet de valider l'inversion de la matrice MES. En principe, si le système est correctement conditionné, les résultats doivent être presque parfaits ;
- la simulation **FEM / IMES** permet d'effectuer une simulation plus réaliste dans le sens où le calcul FEM peut être considéré comme un calcul de référence réalisé avec des forces connues qu'il s'agit de retrouver avec la méthode MES inverse ;
- la simulation **FEM / ISEA** permet de comparer l'efficacité de deux méthodes énergétiques inverse. En d'autres termes, il s'agit de quantifier l'apport de la MES par rapport à la SEA dans un contexte de problème inverse.

Un schéma explicatif de la méthode de simulation employée est donné à la figure 7.1.

Simulation	Méthode directe employée	Méthode inverse employée
1	MES	IMES (MES inverse)
2	FEM (éléments finis)	IMES
3	FEM	ISEA (SEA inverse)

TABLE 7.1 – Simulations numériques effectuées

Simulations MES / IMES Le premier type de simulations doit permettre de valider l'inversion de la matrice MES, ou sa “pseudo-inversion” si elle n'est pas carrée. Pour ces simulations, nous considérons une plaque mince dont les caractéristiques sont données dans le tableau 7.2.

Paramètre	Valeur
Longueur	1 m
Largeur	1 m
Hauteur	2×10^{-3} m
Module de Young E	2.1×10^{11} Pa
Coefficient de Poisson ν	0.3
Masse volumique ρ	7800 Kg.m ⁻³

TABLE 7.2 – Caractéristiques de la plaque mince utilisée

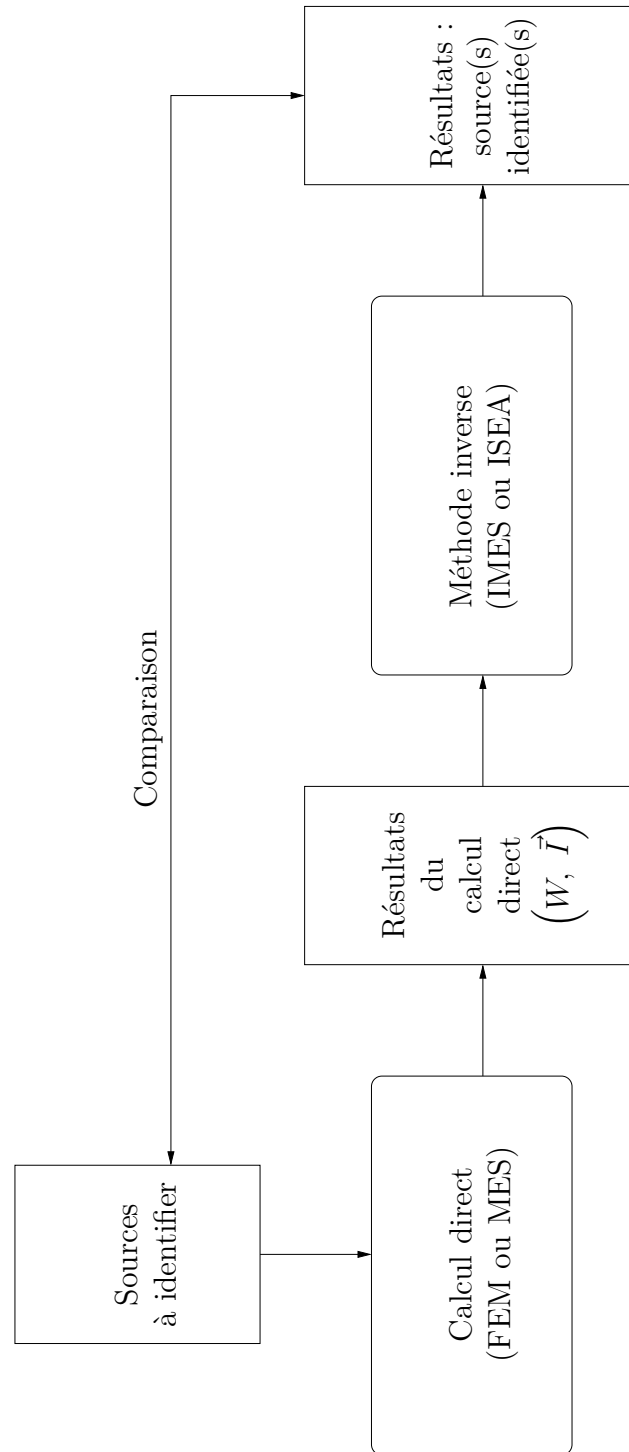


FIGURE 7.1 – Méthode utilisée pour les simulations numériques

La plaque considérée est alimentée par une puissance entrante de 1 W.m^{-2} . On note N le nombre de degrés de liberté de la plaque et m le nombre de mesures. La

matrice à inverser est donc de taille $m \times N$. La figure 7.2 présente un premier résultat pour une matrice carrée ($N = m = 64$). Le résultat est parfait, c'est ce à quoi l'on pouvait s'attendre pour une matrice carrée...

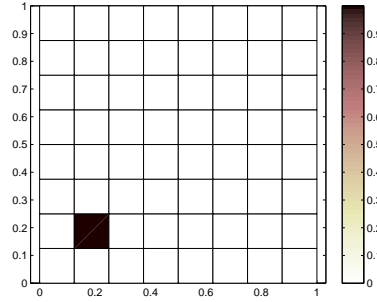


FIGURE 7.2 – Simulation MES / IMES pour $m = N = 64$. Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

À ce stade, il est intéressant de voir l'impact de valeurs de m et N différentes sur le résultat de la pseudo-inversion. La figure 7.3 montre les résultats obtenus en faisant varier $\xi = \frac{m}{N}$.

Comme l'on pouvait s'y attendre, la précision du résultat décroît à mesure que m diminue. Toutefois, la localisation de la source reste très correcte. Pour ce qui est de la quantification, le tableau 7.3 montre qu'elle devient vite insuffisante avec déjà 18% d'erreur pour $\xi = 0,5$.

Valeur de ξ	Erreur
0,06	30 %
0,14	25 %
0,5	18 %

TABLE 7.3 – Quantification de l'erreur sur la source identifiée

Simulations FEM / IMES On se place ici dans un cadre plus réaliste. La plaque est modélisée par éléments finis, ce qui permet de générer les m données d'entrée de la MES inverse. On sollicite la plaque en force, et l'on calcule la puissance injectée qui en résulte :

$$\pi = \frac{1}{2} \frac{F^2}{8\sqrt{D\rho h}} \quad (7.1)$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. La correspondance ($F \leftrightarrow \pi$) est effectuée sous hypothèse d'une plaque infinie ; on se reportera à la thèse de Pierre Hardy [Har05] pour plus d'informations à ce sujet. Le code éléments finis utilisé (Comsol) donne des résultats

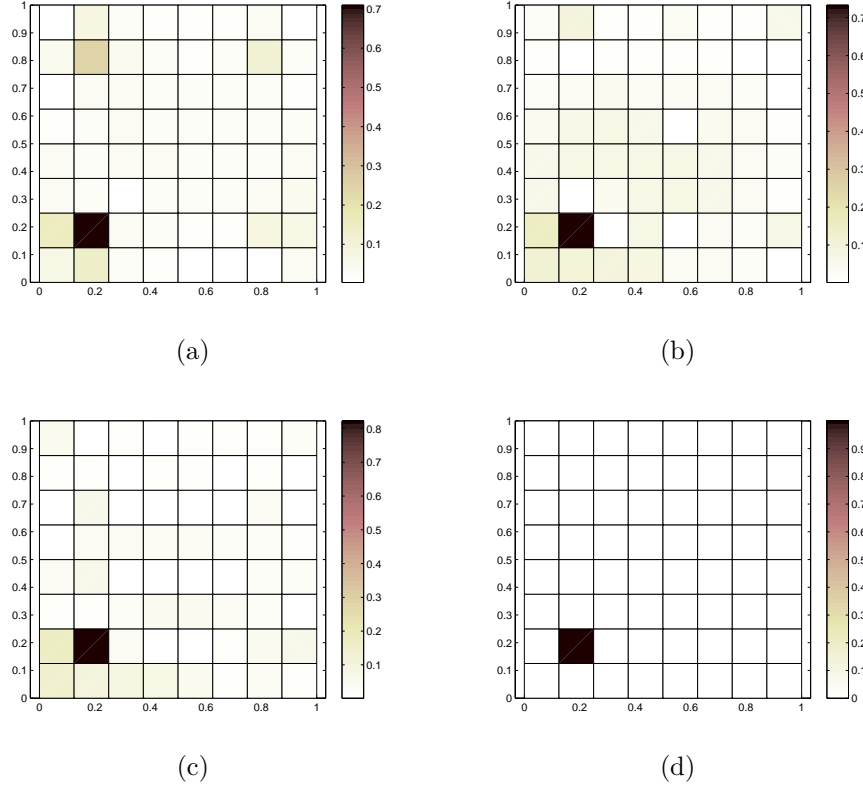


FIGURE 7.3 – Simulations MES / IMES pour $m = 4(\xi = 0, 06)$ (a), $m = 9(\xi = 0, 14)$ (b), $m = 32(\xi = 0, 5)$ (c) et $m = 64(\xi = 1)$ (d). Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

cinématiques qui sont traduits en données énergétiques après moyennage fréquentiel et spatial. La figure 7.4 donne les résultats obtenus pour différentes valeurs de ξ . Comme attendu là aussi, les résultats sont moins bons que pour une simulation MES / IMES. Toutefois, la localisation reste correcte.

Par ailleurs, nous allons voir que la fréquence d'étude f_c est également très importante. Nous nous plaçons pour cela à $\xi = 1$. La figure 7.5 montre les résultats obtenus. Les résultats s'améliorent à mesure que la fréquence centrale f_c augmente. On retrouve là un résultat logique, les méthodes énergétiques étant essentiellement efficaces en hautes fréquences.

Ce résultat n'étant pas suffisamment lisible sur la figure 7.5, on opte pour la formulation d'un critère que l'on définit comme suit :

$$Pr_L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\pi_i - \pi_i^{\text{exact}})^2}{N (\pi_i^{\text{exact}})^2}} \quad (7.2)$$

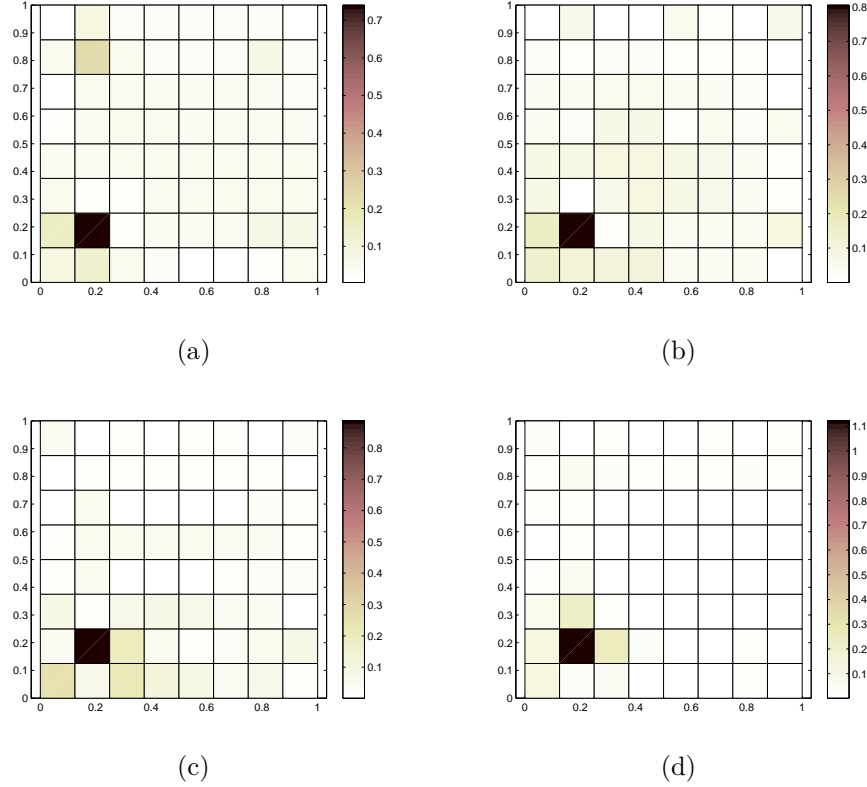


FIGURE 7.4 – Simulations FEM / IMES pour $\xi = 0.06$ (a), $\xi = 0.14$ (b), $\xi = 0.5$ (c) et $\xi = 1$ (d)

où π_i correspond à la puissance entrante de la facette i (valeur déterminée par résolution du problème inverse) et π_i^{exact} correspond à la puissance entrante exacte pour la même facette. La figure 7.6 montre l'évolution de ce critère avec la fréquence.

Comparaison SEA / MES La SEA (Statistical Energy Analysis) est la plus connue des méthodes énergétiques ; il est donc logique de comparer la MES à la SEA pour valider la méthode. Dans ce chapitre, nous comparons donc deux types de simulation, FEM / IMES et FEM / ISEA. Les figures 7.7 et 7.8 montrent les résultats obtenus pour chacune de ces simulations en faisant varier η . Il est manifeste que la MES présente un net avantage pour les amortissements les plus élevés.

Afin de quantifier le gain de la MES par rapport à la SEA, on introduit le critère de précision Pr_Q en plus du critère Pr_L déjà défini à l'équation 7.2 :

$$Pr_Q = \sqrt{\frac{(\rho_{\text{source}} - \rho_{\text{source}}^{\text{exact}})^2}{(\rho_{\text{source}}^{\text{exact}})^2}} \quad (7.3)$$

Ces deux critères sont tracés à la figure 7.9 et montrent clairement une supériorité de la MES.

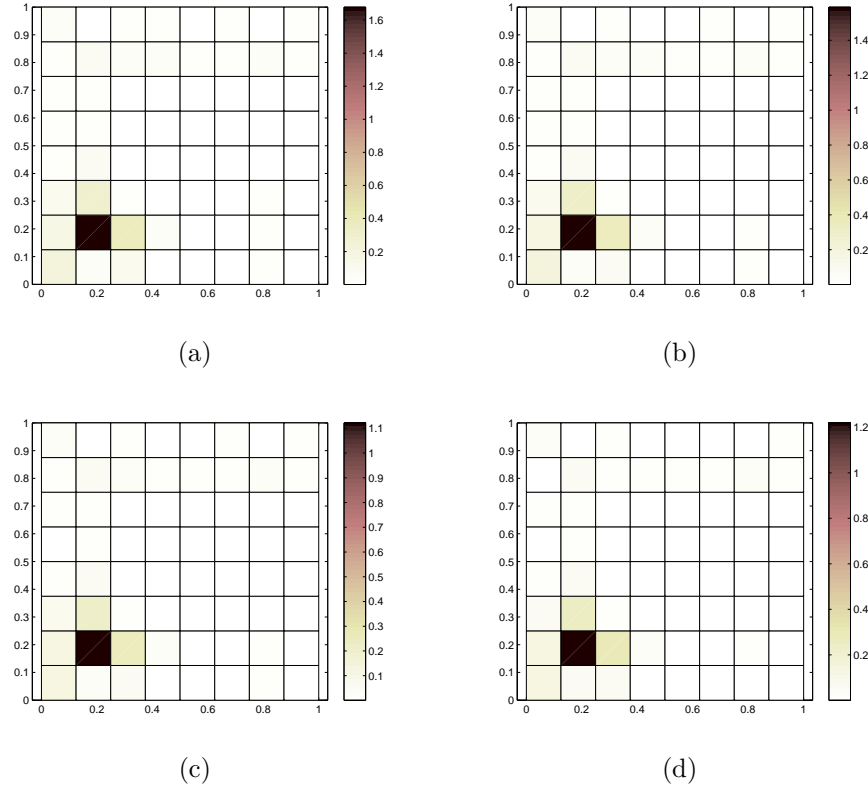


FIGURE 7.5 – Simulations FEM / IMES pour $f_c = 800Hz$ (a), $f_c = 900Hz$ (b), $f_c = 950Hz$ (c) et $f_c = 1500Hz$ (d). Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

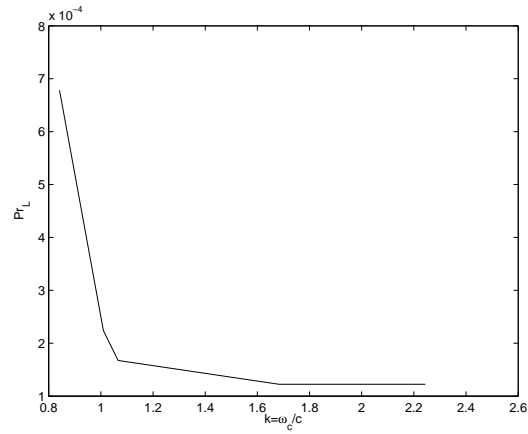


FIGURE 7.6 – Précision du résultat de l'inversion du problème en fonction de f_c . Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

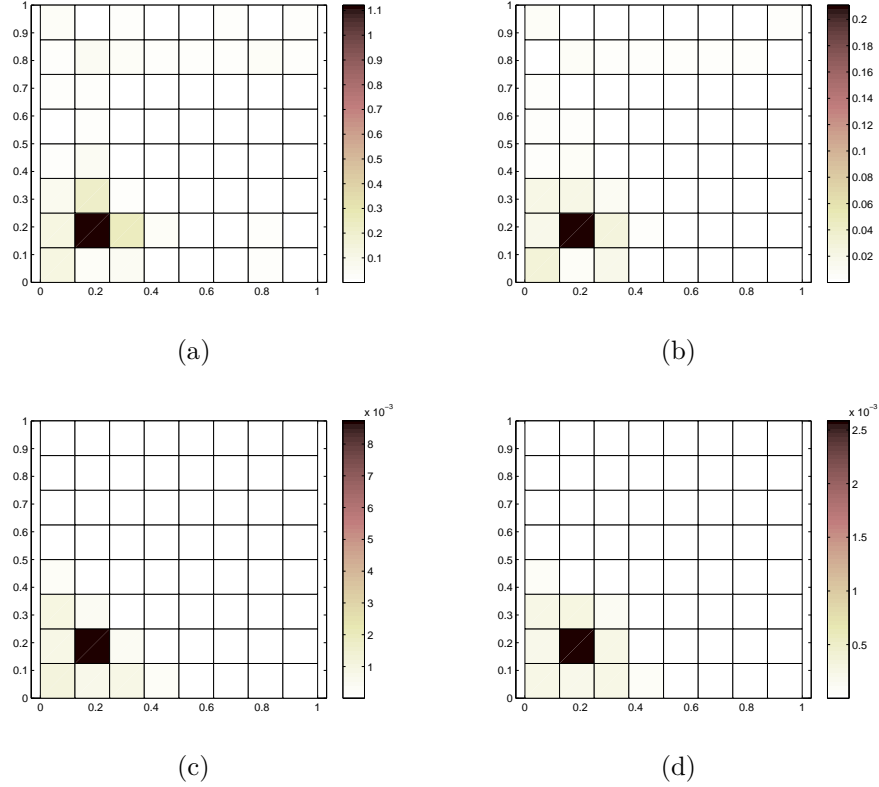


FIGURE 7.7 – Simulations FEM/IMES pour $\eta = 0.001$ (a), $\eta = 0.01$ (b), $\eta = 0.1$ (c) et $\eta = 0.2$ (d). Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

Influence du nombre de mesures Ce chapitre est consacré à l'influence de la position et du nombre de mesures disponibles pour l'inversion du problème. La méthode est appliquée pour différentes distributions de mesures, et les résultats sont présentés à la figure 7.10, pour des valeurs de $m = 55$ et $m = 39$.

Les résultats montrent une bonne localisation de la source. Le nombre de mesures revêt toutefois une importance capitale pour sa quantification, comme en témoigne l'évolution du critère Pr_L représenté à la figure 7.11.

Cas d'une cavité

Une seule source pariétale. Cette partie est consacrée à l'application de la méthode inverse dans le cas d'une cavité. C'est donc la formulation 6.30 qu'il s'agit d'inverser.

L'exemple considéré ici est relativement simple. Il est constitué d'une cavité de fluide (de l'air) dont les parois sont absorbantes. Le tableau 7.4 donne les caractéristiques de cette structure. L'excitation est située sur l'une des parois, aux coordonnées $(0, 0.39, 0.66)$, et la puissance entrante est de 1 W.m^{-2} .

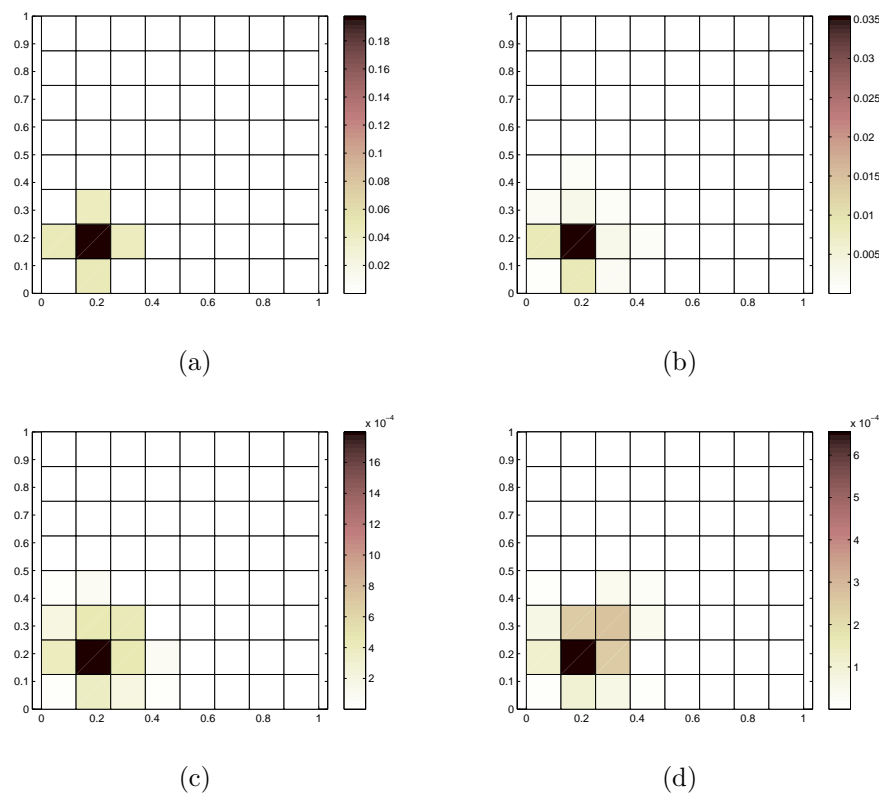


FIGURE 7.8 – Simulations FEM/SEA pour $\eta = 0.001$ (a), $\eta = 0.01$ (b), $\eta = 0.1$ (c) et $\eta = 0.2$ (d). Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

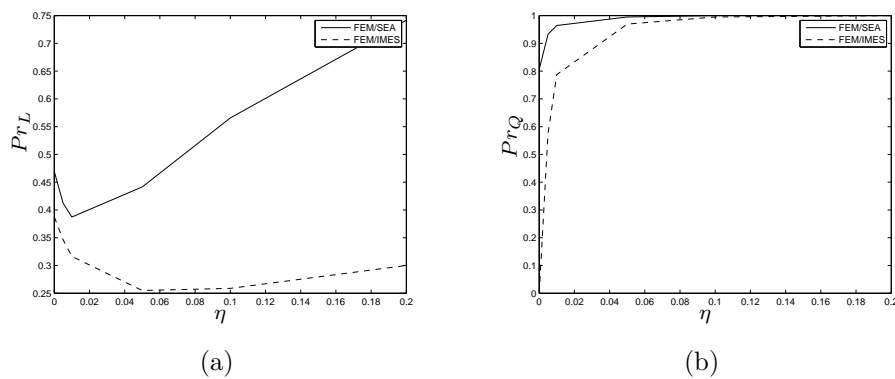


FIGURE 7.9 – Critères de localisation (a) et de quantification (b) appliquées à la MES et à la SEA. Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

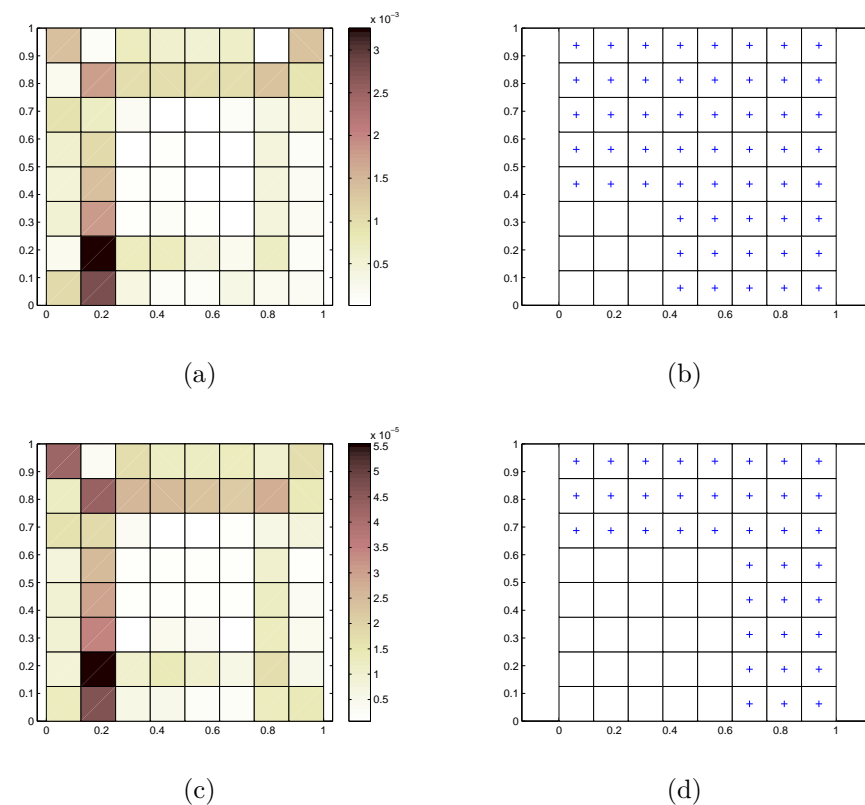


FIGURE 7.10 – Simulations FEM/IMES pour des répartitions de capteurs représentées en bleu et pour $m = 55$ ((a) et (b)) et $m = 39$ ((c) et (d)). Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

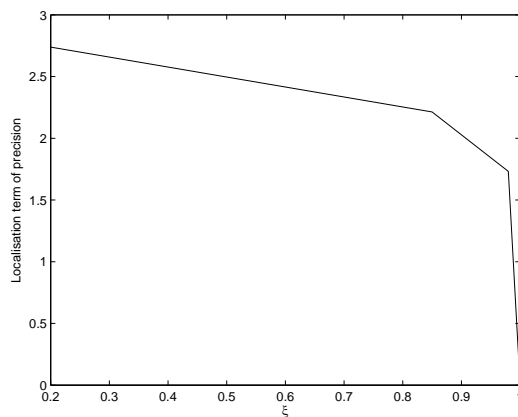


FIGURE 7.11 – Valeur du critère de précision Pr_L en fonction de ξ . Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

Paramètre	Valeur
Longueur	1,5 m
Largeur	1,2 m
Hauteur	1 m
Masse volumique du fluide ρ_f	1,25 kg.m ⁻³
Vitesse du son dans le fluide c	343 m.s ⁻¹
Absorption aux parois	0,3

TABLE 7.4 – Caractéristiques du système étudié

Dans un premier temps, nous vérifions le bon conditionnement du problème en effectuant un test avec $N = m = 148$. Les résultats sont parfaits comme en témoigne la figure 7.12.

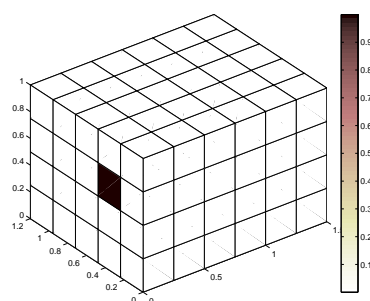


FIGURE 7.12 – Simulation MES / IMES. Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

Nous nous intéressons maintenant à une simulation FEM / MES. Les résultats de cette simulation sont donnés à la figure 7.13 pour des valeurs de $\xi = \frac{m}{N}$ variant de 0,63 à 2,32. Les résultats sont présentés pour $f_c = 1000Hz$. Les m “mesures” sont situées près des frontières de la cavité, comme indiqué sur la figure 7.14.

On constate que la localisation correcte de la source nécessite au moins autant de mesures que d’éléments. Ceci n’est pas trop grave car la méthode énergétique utilisée ne nécessite pas un maillage fin ; par conséquent il est possible d’adapter le nombre de mailles au nombre de mesures disponibles...

Deux sources pariétales. Dans cet exemple nous tentons de localiser deux sources situées sur les parois de la cavité. Comme pour l’exemple précédent, nous effectuons d’abord une simulation MES / IMES avec $m = N = 148$; le résultat de cette simulation est présenté à la figure 7.15 : la localisation est parfaite, ce qui valide la bonne inversion du problème.

Des simulations FEM / IMES sont ensuite effectuées pour différentes valeurs de ξ . Les résultats sont présentés à la figure 7.16

On constate que l'inversion du problème conduit à l'identification correcte de l'une des deux sources, mais pas des deux...

Influence du bruit de mesure Nous nous intéressons ici à la robustesse de la méthode vis-à-vis du bruit de mesure. De l'aléa est artificiellement ajouté aux “mesures numériques”. Cet aléa est quantifié par le pourcentage ϵ d'erreur introduite. La figure 7.17 montre les résultats de cette simulation. Ces résultats sont très bons mais doivent être interprétés pour ce qu'ils sont : l'aléa est réparti uniformément sur les mesures selon une loi gaussienne qui “lisse” l'erreur et favorise la résolution. Dans la réalité, il faut s'attendre à des bruits de mesure plus localisés et moins favorables à l'inversion du problème. Pour cette étude, les caractéristiques de la structure étudiée sont rappelées au tableau 7.5.

Dimensions de la structure	Coefficient d'absorption	Nombre d'éléments	Nombre de mesures numériques
$2 \times 2 \times 4 \text{ m}^3$	$\alpha = 0.3$	360	360

TABLE 7.5 – Caractéristiques de la structure étudiée

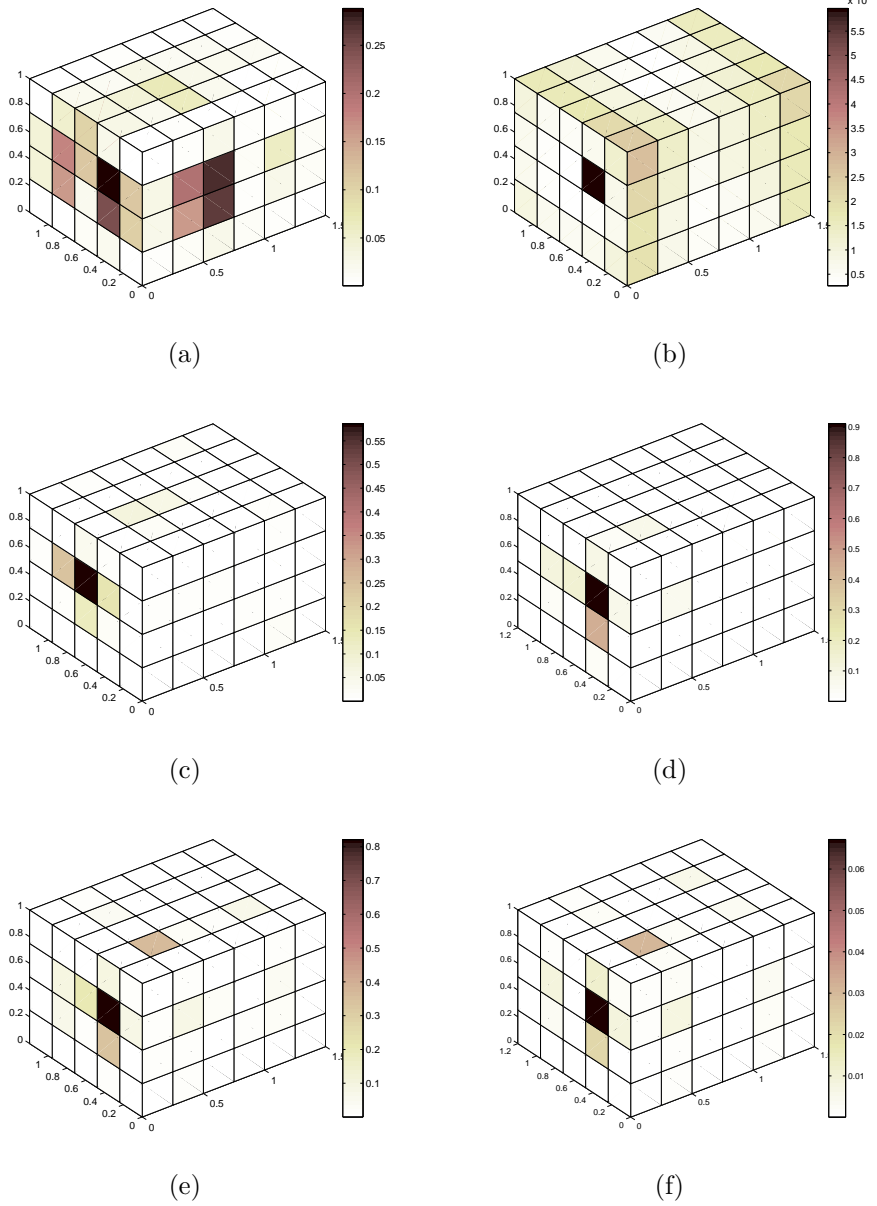


FIGURE 7.13 – Simulations FEM / IMES pour (a) $\xi = 0.63$, (b) $\xi = 1$, (c) $\xi = 1.59$, (d) $\xi = 1.93$, (e) $\xi = 2$ and (f) $\xi = 2.32$. Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

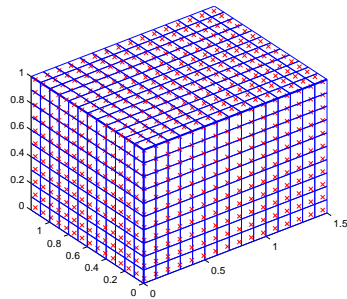


FIGURE 7.14 – Emplacement des “points de mesure” (en rouge). Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

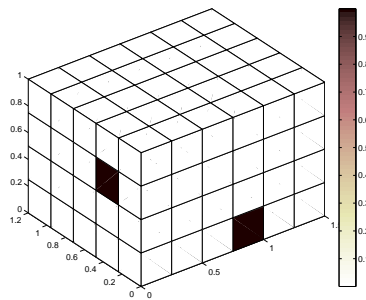


FIGURE 7.15 – Simulation MES / IMES pour deux sources pariétales. Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

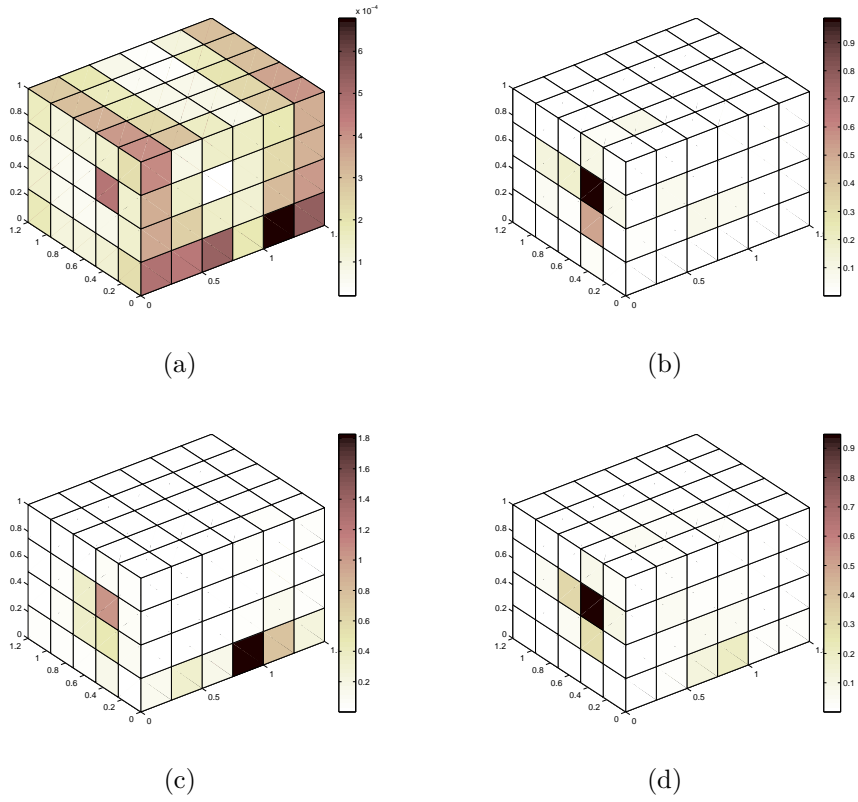


FIGURE 7.16 – Simulations FEM / IMES pour (a) $\xi = 1$, (b) $\xi = 1.72$, (c) $\xi = 4$ et (d) $\xi = 4.25$. Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

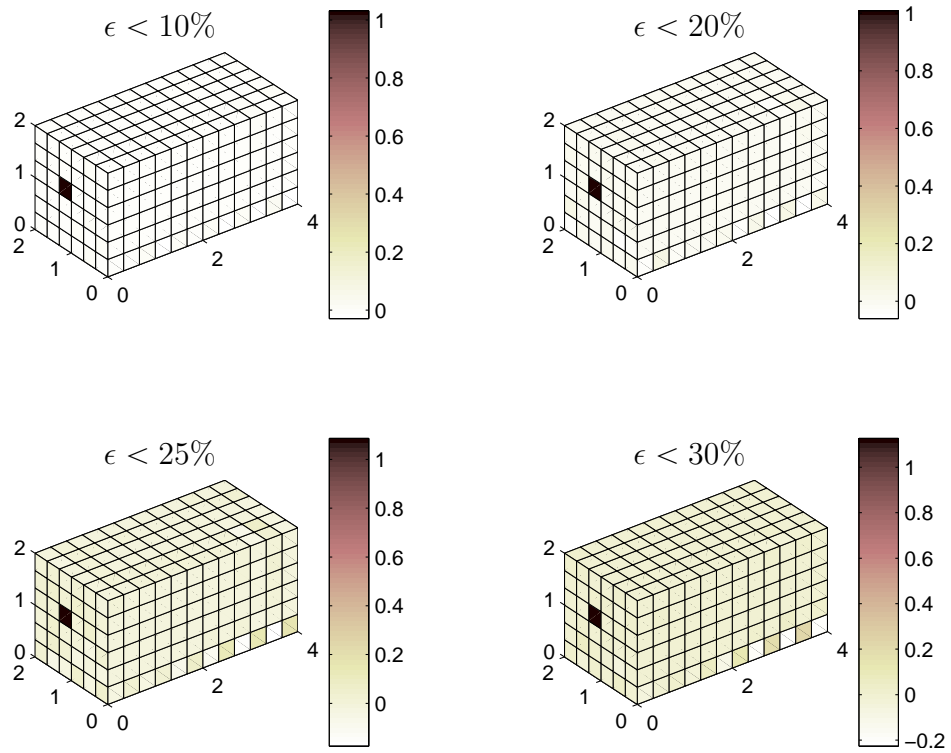


FIGURE 7.17 – Sensibilité de la MES inverse – ajout de bruit de mesure. Figure issue de la thèse de Mohammed Chabchoub [Cha10].

7.2 Optimisation des structures

7.2.1 Optimisation de l'absorption pariétale

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'optimisation du coefficient d'absorption des parois d'une cavité acoustique. La valeur de ce coefficient d'absorption peut dépendre du type de matériau apposé sur les parois. Nous considérons ici une cavité dont les contours sont maillés par N éléments. Une source de puissance est appliquée sur l'une des facettes du maillage, et l'on souhaite minimiser le bruit en un ou plusieurs points de la cavité.

Formulation du problème acoustique

Nous traitons ce problème dans le cadre de la MES intégrale présentée au chapitre 6.1.2. Ainsi, le vecteur des densités d'énergie dans la cavité s'écrit sous forme discrétisée :

$$\mathbf{W} = \mathbf{Z}_w(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Pi}_{\text{entr}} \quad (7.4)$$

où $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}^T$ est le vecteur des coefficients d'absorption (un coefficient α_i par facette). La quantité qui nous intéresse ici est le vecteur des densités d'énergie réduit aux points d'écoute, noté \mathbf{W}_r . L'équation 7.4 s'écrit donc :

$$\mathbf{W}_r = \mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Pi}_{\text{entr}} \quad (7.5)$$

La fonction à minimiser $F(\boldsymbol{\alpha})$ est directement liée au niveau de bruit dans la cavité :

$$F(\boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\|\boldsymbol{\Pi}_{\text{entr}}^T \mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{Z}_r(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\Pi}_{\text{entr}}\|} \quad (7.6)$$

Formulation du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation peut être formulé comme suit :

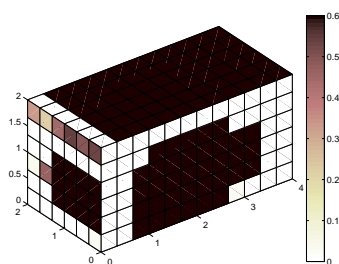
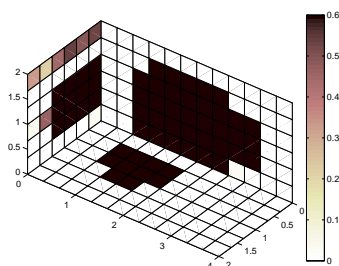
$$\text{Minimiser } F(\boldsymbol{\alpha}) \text{ avec } \begin{cases} 0 < \alpha_i < 0,6 & \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \\ \bar{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{N} = 0,3 \end{cases} \quad (7.7)$$

La première contrainte consiste à borner les coefficients α_i entre 0 et 0,6. La seconde contrainte $\left(\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{N} = 0,3\right)$ permet d'imposer la moyenne des coefficients α_i , ce qui correspond à une contrainte de masse. En effet, si l'on ne contraint pas le problème en masse, l'optimisation conduit à une solution qui consiste à maximiser l'absorption partout sur les parois.

C'est ici un algorithme d'optimisation génétique classique qui est utilisé. Les résultats de l'optimisation sont présentés aux figures 7.18 et 7.19. Les caractéristiques du problème sont consignées dans le tableau 7.6.

Paramètre	Valeur
N	360
α_{\min}	0
α_{\max}	0,6
$\bar{\alpha}$	0,3
Dimensions de la cavité	$4 \times 2 \times 2$ m
Position de la source (en m)	(2, 83; 1, 17; 0)
Position du point d'écoute (en m)	(1, 33; 0, 6; 0, 6)

TABLE 7.6 – Données du problème

FIGURE 7.18 – Résultat de l'optimisation : distribution des coefficients α_i sur les parois (vue de dessus) – en blanc : $\alpha = 0$, en noir : $\alpha = 0.6$ FIGURE 7.19 – Résultat de l'optimisation : distribution des coefficients α_i sur les parois (vue de dessous) – en blanc : $\alpha = 0$, en noir : $\alpha = 0.6$

Il est intéressant de remarquer que l'algorithme converge vers une solution "tout ou rien" ($\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = \alpha_{\max}$). On peut vérifier avec succès la robustesse de la solution obtenue (utilisation de différents algorithmes, avec différents points de départ...).

7.2.2 Optimisation de forme

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'optimisation de forme d'une cavité sous critères acoustiques. Les travaux présentés ici ont été effectués dans le cadre de l'ANR JCJC MoSiRoLaMi en collaboration avec Frédéric Gillot et Renata Troian. Ils ont donné lieu à plusieurs publications [TBG14a, TBG14b]. L'objectif est de mener une optimisation de forme sans remaillage, en travaillant directement sur les paramètres définissant la géométrie de la structure.

Formulation du problème acoustique

C'est ici la MES intégrale qui est utilisée. Cette méthode est décrite au chapitre 6.1.2.

Formulation du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation considéré est très classique et peut être formulé ainsi :

$$\begin{aligned}
 &\text{Trouver le minimum de la fonction : } f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(\mathbf{X})) \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n \\
 &\text{sous les contraintes :} \quad \begin{aligned} &x_i^{\min} < x_i < x_i^{\max} \\ &h_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(\mathbf{X})) = 0 \\ &g_k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(\mathbf{X})) \leq 0 \end{aligned} \\
 &\text{avec :} \quad \begin{aligned} &i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ &j \in \llbracket 1, n_e \rrbracket \\ &k \in \llbracket 1, n_i \rrbracket \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

f est la fonction objectif à minimiser, $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$ est l'intervalle des valeurs permises pour les variables de conception x_i qui définissent le vecteur \mathbf{X} , et h_j et g_k sont respectivement des contraintes d'égalité et d'inégalité. La fonction f à minimiser correspond ici à la densité d'énergie en un point de la cavité.

Paramétrisation du problème

Nous définissons ici une fonction de transformation permettant de projeter le problème MES 3D sur un plan 2D afin de faciliter le processus d'optimisation. On appelle Ω la cavité acoustique, et $\partial\Omega$ la surface la délimitant. On appelle \vec{r} la fonction permettant de passer de l'espace 2D noté S à l'espace 3D :

$$\vec{r} : (\xi_1, \xi_2) \mapsto [x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2), z(\xi_1, \xi_2)] \tag{7.9}$$

Cette fonction est illustrée à la figure 7.20. On définit également les vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 :

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i}, \quad i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \tag{7.10}$$

Ces vecteurs définissent le plan tangent à la surface $\partial\Omega$ au point $\vec{r}(\xi_1, \xi_2)$. Le vecteur normal à cette surface s'écrit alors :

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|} \quad (7.11)$$

C'est ce vecteur \vec{n} qui intervient dans la formulation MES intégrale. Il s'agit donc maintenant de réécrire le problème acoustique, dont les variables d'espace sont (x, y, z) , en fonction des nouvelles variables (ξ_1, ξ_2) .

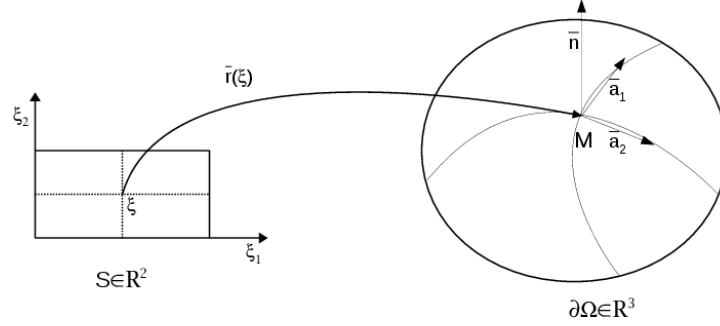


FIGURE 7.20 – Définition de la fonction de transformation r .

Reformulation du problème acoustique

Si l'on considère un point $P = P(x, y, z)$ de l'espace $\partial\Omega$. Rappelons l'expression de la densité d'énergie en un point M de la cavité :

$$W(M) = \int_{\partial\Omega} \left(d(P)G(\overrightarrow{PM}) \pi(P)\vec{u} \cdot \vec{n} \right) d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(d(P)G(\overrightarrow{PM}) \sigma(P)\vec{u} \cdot \vec{n} \right) d\partial\Omega \quad (7.12)$$

Dans le nouveau système de coordonnées $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, il vient :

$$P = r(\xi) = (x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2), z(\xi_1, \xi_2)) \quad (7.13)$$

$$\vec{n}(P) = \vec{n}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|} \quad (7.14)$$

M est ici un point intérieur à la cavité et n'appartient donc pas à $\partial\Omega$. On note ses coordonnées (b_1, b_2, b_3) . On obtient alors :

$$\overrightarrow{PM} = [b_1 - x(\xi_1, \xi_2); b_2 - y(\xi_1, \xi_2); b_3 - z(\xi_1, \xi_2)] \quad (7.15)$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|} = \frac{[b_1 - x(\xi_1, \xi_2); b_2 - y(\xi_1, \xi_2); b_3 - z(\xi_1, \xi_2)]}{\|[b_1 - x(\xi_1, \xi_2); b_2 - y(\xi_1, \xi_2); b_3 - z(\xi_1, \xi_2)]\|} \quad (7.16)$$

$$\int_{\partial\Omega} d\partial\Omega = \iint_S \|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\| d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.17)$$

Les quantités énergétiques π et σ peuvent alors être exprimées dans les nouvelles coordonnées :

$$\tilde{\pi} = (\pi \circ \vec{r}) (\xi_1, \xi_2) \quad (7.18)$$

$$\tilde{\sigma} = (\sigma \circ \vec{r}) (\xi_1, \xi_2) \quad (7.19)$$

On en déduit alors l'écriture de W et $\tilde{\sigma}$:

$$\begin{aligned} W(M) = & \iint_S (d(P)G(\xi_1, \xi_2)\tilde{\pi}(\xi_1, \xi_2)\vec{u}(\xi_1, \xi_2) \cdot \vec{n}(\xi_1, \xi_2)\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|) d\xi_1 d\xi_2 \\ & + \iint_S (d(P)G(\xi_1, \xi_2)\tilde{\sigma}(\xi_1, \xi_2)\vec{u}(\xi_1, \xi_2) \cdot \vec{n}(\xi_1, \xi_2)\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|) d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\xi_{10}, \xi_{20}) = & (1 - \alpha) \iint_S (d(P)G(\xi_1, \xi_2)\tilde{\sigma}(\xi_1, \xi_2)\vec{u}(\xi_1, \xi_2) \cdot \vec{n}(\xi_1, \xi_2)\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|) d\xi_1 d\xi_2 \\ & + (1 - \alpha) \iint_S (d(P)G(\xi_1, \xi_2)\tilde{\pi}(\xi_1, \xi_2)\vec{u}(\xi_1, \xi_2) \cdot \vec{n}(\xi_1, \xi_2)\|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2\|) d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.21) \end{aligned}$$

Il est à présent possible de discrétiser ces formulations. Comme dans le chapitre 6.1.2, on obtient les équations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} \Sigma + (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} \Pi \\ &= ([\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}]^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}) \Pi_{\text{entr}} \quad (7.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \mathbf{B} \Pi_{\text{entr}} + \mathbf{B} \Sigma \\ &= \mathbf{Z}_w \Pi_{\text{entr}} \quad (7.23) \end{aligned}$$

Procédure d'optimisation

La procédure adoptée pour l'optimisation s'organise ainsi :

- détermination de la géométrie Ω et de la fonction de transformation f associée au problème ;
- détermination des paramètres d'optimisation x_i ;
- discrétisation de la surface S paramétrée en (ξ_1, ξ_2) ;
- détermination de la fonction objectif (ici le niveau de bruit dans la cavité) ;
- détermination des fonctions contraintes h_j et g_k .

Résultats

La méthode est illustrée ici dans le cas d'une simple cavité parallélépipédique dont on fait varier la géométrie au moyen de deux paramètres. Chacune des six faces de la cavité est un patch de Bézier, ce qui permet de définir la fonction de transformation (cf. figure 7.21). Les détails de la construction de cette fonction sont précisés dans l'article [TBG14a]. Une fonction de contrainte est spécifiée de manière à limiter la surface de la cavité afin d'éviter les solutions infinies.

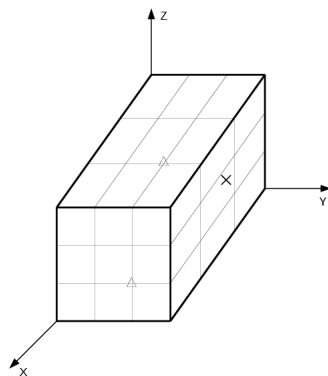


FIGURE 7.21 – Cavité utilisée pour illustrer la méthode. Les points de contrôle (paramètres d'optimisation) sont matérialiser par des triangles. La croix repère le point d'écoute. Figure issue de l'article de R. Troian [TBG14a]

Le résultat de l'optimisation est présenté à la figure 7.22.

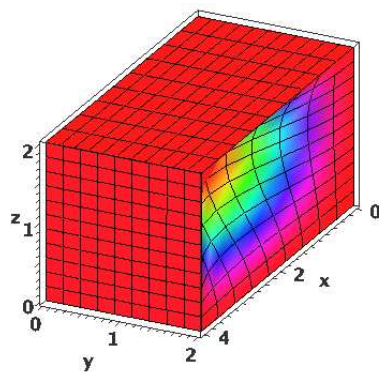


FIGURE 7.22 – Résultat de l'optimisation. Figure issue de l'article [TBG14a].

8 Bilan de la seconde partie

Dans cette seconde partie sont résumés les travaux réalisés en moyennes et hautes fréquences au moyen de méthodes énergétiques.

C'est la Méthode Énergétique Simplifiée (MES), qui est retravaillée et adaptée ici. En particulier, elle a donné lieu à une implémentation la rendant propre à résoudre des problèmes d'optimisation et d'identification de sources ; ce sont ces problématiques qui sont abordées, et qui ont donné lieu à des résultats intéressants :

- la détection de sources pariétales émettant dans une cavité acoustique ;
- la détection de sources dans un modèle de plaque ;
- l'optimisation de forme d'une cavité acoustique ;
- l'optimisation de la répartition de matériaux absorbants sur les parois d'une cavité acoustique.

Néanmoins, l'ampleur des perspectives reste conséquente ; en particulier, les points suivants mériteraient d'être approfondis, et sont l'objet de recherches actuelles, en particulier dans le domaine de l'optimisation de forme :

- l'utilisation de techniques ne nécessitant pas le remaillage de la structure durant le processus d'optimisation est prometteuse mais doit être approfondie pour pouvoir être utilisée dans le cadre de structures plus complexes ;
- les problématiques d'optimisation de forme sans remaillage se prêtent bien aux systèmes modélisés avec la MES, mais elles restent de ce fait cantonnées aux applications moyennes et hautes fréquences ; le chapitre suivant traite de méthodes hybrides qu'il serait intéressant d'associer aux méthodes discutées ici.

Rappelons que les travaux présentés dans cette partie ont fait intervenir les doctorants et post-doctorants Mohammed Chachoub et Renata Troian.

Troisième partie

Approche mixte

9 Introduction

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux méthodes reposant sur la description du champ cinématique d’une structure, et plus généralement de systèmes complexes. Dans la seconde partie, c’est une vision énergétique qui a été adoptée. La troisième partie propose plusieurs approches “mixtes” :

- une méthode hybride BEM / MES dans laquelle les champs direct et réverbéré sont traités différemment ;
- une méthode hybride MES / FEM permettant la transition basses / moyennes fréquences ;
- une méthode de prédiction du champ rayonné par une structure vibrante basée sur l’évaluation de directivité et la propagation de la densité d’énergie.

Ces travaux de recherche ont conduit aux publications suivantes :

- dans le cadre de la thèse de Kévin Soobbarayen : [SBS15, SSB14, SBS13a, SBS13b] ;
- dans le cadre de travaux personnels : [Bes12, BIJ10].

10 Différentiation champ direct / champ réverbéré

On a vu à la section 6.1.2 que l'une des limitations de ma MES est la présence de la directivité dans l'expression intégrale. Il n'est pas possible de connaître la forme de cette directivité *a priori* sans effectuer de calculs, et l'approximation qui est donc faite (le plus souvent on considère une directivité lambertienne) peut conduire à des résultats erronés.

On considère toutefois que dans le cas du champ réverbéré, la directivité induite par la réflexion aux parois est relativement proche d'une directivité lambertienne. La directivité des sources extérieures, qui intervient dans le champ direct, est en revanche très variable suivant le type d'excitation. Dans un premier temps, mieux évaluer la directivité du champ direct constitue une piste prometteuse pour une amélioration des résultats ne nécessitant pas trop de calculs supplémentaires. La technique adoptée ici consiste à évaluer le champ direct au moyen d'un calcul par éléments de frontière (BEM), le champ réverbéré restant modélisé par la MES "classique". Notons que certains auteurs [SL05] se sont déjà intéressés à l'élaboration de méthodes mixant approche énergétique et méthode cinématique, mais en considérant différents sous-systèmes.

La technique proposée ici est illustrée à la figure 10.1.

10.1 Formulation du problème

Dans cette méthode, le champ direct est décrit au moyen de la méthode des éléments de frontière (BEM), et le champ réverbéré par la Méthode Énergétique Simplifiée (MES).

Méthode Énergétique simplifiée → champ réverbéré

C'est la MES intégrale qui est utilisée ici. Cette formulation de la MES est décrite à la section 6.1.2. La formulation discrétisée sur laquelle se base notre approche est la suivante (cf. équation 7.23) :

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \mathbf{B}\mathbf{\Pi}_{\text{entr}} + \mathbf{B}\mathbf{\Sigma} \\ &= \mathbf{Z}_w\mathbf{\Pi}_{\text{entr}}\end{aligned}\tag{10.1}$$

Une équation similaire existe pour l'intensité acoustique :

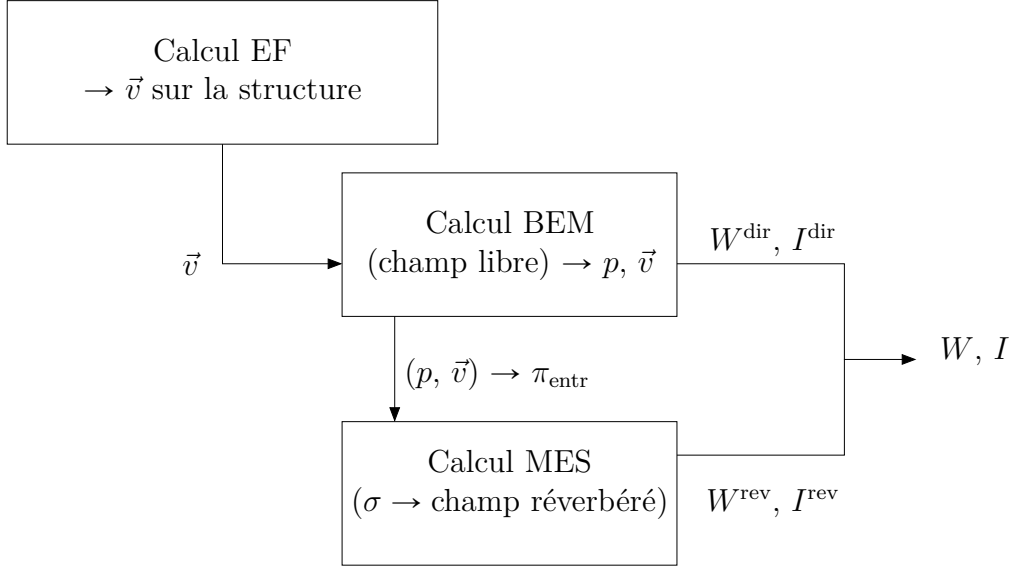


FIGURE 10.1 – Schéma récapitulatif de la méthode proposée

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}_i \mathbf{\Pi}_{\text{entr}} \quad (10.2)$$

Formulation par éléments de frontière → champ direct

La puissance entrante $\mathbf{\Pi}$ est située sur la surface de la structure modélisée par éléments finis. Le calcul par éléments finis permet d'obtenir un champ de vitesse pariétal qui constitue la donnée d'entrée pour la méthode des éléments de frontière. Un calcul BEM est alors effectué sous l'hypothèse de conditions de Sommerfeld, ce qui permet de s'affranchir de la modélisation de l'ensemble de la structure. Il est alors possible d'évaluer la contribution du champ direct par calcul de la pression interne.

Soit (p_I, \vec{v}_I) la pression et la vitesse pariétale. Un calcul BEM permet d'obtenir la pression $p(M)$ dans la cavité :

$$cp(M) = \int_S \left(p_I(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g(\overrightarrow{\text{MP}}) \frac{\partial p_I}{\partial \vec{n}} \right) dS \quad (10.3)$$

On peut noter que $\frac{\partial p_I}{\partial \vec{n}} = -\rho\omega\vec{v}_I \cdot \vec{n}$, où ρ est la masse volumique du fluide. \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface S et c est défini comme suit :

$$c = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & \text{si } M \text{ is on a smooth boundary of } \Omega \\ \frac{\mathcal{S}}{4\pi}, & \text{si } M \text{ is on a nonsmooth boundary of } \Omega \end{cases} \quad (10.4)$$

\mathcal{S} est l'angle solide. g est la fonction de Green en espace libre :

$$g(\overrightarrow{\text{MP}}) = \frac{e^{-ik\|\overrightarrow{\text{MP}}\|}}{4\pi\|\overrightarrow{\text{MP}}\|} \quad (10.5)$$

Le champ direct peut alors être exprimé avec les notation de la MES :

$$W^{\text{dir}}(M) = \frac{1}{2\rho c^2} p(M) p^*(M) \quad (10.6)$$

$$I^{\text{dir}}(M) = \frac{1}{2} \Re(p(M) v^*(M)) \quad (10.7)$$

$v = \vec{v} \cdot \vec{n}_p$ (et v^*) est obtenu à partir de p au moyen de l'équation $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}_p} = -\rho\omega\vec{v} \cdot \vec{n}_p$ où \vec{n}_p est un vecteur unitaire. Ainsi, I correspond à la projection de \vec{I} sur le vecteur \vec{n}_p .

Formulation couplée

La pression calculée par BEM peut s'écrire sous forme matricielle :

$$p_I = \mathbf{H}_p \mathbf{p}_{str} + \mathbf{G}_p \mathbf{v}_{str} \quad (10.8)$$

où \mathbf{H}_p et \mathbf{G}_p sont les matrices issues de la discrétisation de la formulation intégrale. \mathbf{p}_{str} et \mathbf{v}_{str} sont la pression et la vitesse pariétale de la structure, obtenue au moyen d'un code de calcul par éléments finis. Une expression similaire décrit le champ de vitesse :

$$v_I = \mathbf{H}_v \mathbf{p}_{str} + \mathbf{G}_v \mathbf{v}_{str} \quad (10.9)$$

Les équations 10.6 et 10.7, combinées aux équations 10.8 et 10.9, conduisent aux relations suivantes pour le champ direct :

$$W_n^{\text{dir}} = \frac{1}{2\rho c^2} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str}^* & \mathbf{v}_{str}^* \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

$$I_n^{\text{dir}} = \frac{1}{2} \Re \left(\begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str}^* & \mathbf{v}_{str}^* \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \right) \quad (10.11)$$

où W_n^{dir} est la $n^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{W}^{dir} et I_n^{dir} la $n^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{I}^{dir} . Les matrices $\mathbf{\Lambda}_1$ et $\mathbf{\Lambda}_2$ sont définies comme suit :

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_p \\ \hline \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_p \end{array} \right] \quad (10.12)$$

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_v \\ \hline \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_v \end{array} \right] \quad (10.13)$$

Pour ce qui est du champ réverbéré, \mathbf{W}^{rev} and \mathbf{I}^{rev} peuvent être obtenus à partir des équations 10.1 et 10.2 :

$$W_n^{\text{rev}} = \frac{1}{2} \mathbf{Z}_w^n \Re((\mathbf{p}\mathbf{v}^*)_{str}) \quad (10.14)$$

$$I_n^{\text{rev}} = \frac{1}{2} \mathbf{S}_i^n \Re((\mathbf{p}\mathbf{v}^*)_{str}) \quad (10.15)$$

où \mathbf{Z}_w^n est la $n^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{Z}_w et \mathbf{Z}_i^n est la $n^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{Z}_i . \mathbf{W} et \mathbf{I} s'écrivent alors :

$$W^n = (\mathbf{p}_{str}^* \quad \mathbf{v}_{str}^*) \tilde{\Lambda}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

$$I^n = \Re \left((\mathbf{p}_{str}^* \quad \mathbf{v}_{str}^*) \tilde{\Lambda}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{str} \\ \mathbf{v}_{str} \end{pmatrix} \right) \quad (10.17)$$

Les matrices $\tilde{\Lambda}_1$ et $\tilde{\Lambda}_2$ sont définies ainsi :

$$\tilde{\Lambda}_1 = \frac{1}{2\rho c^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_p \\ \hline \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_p & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_p \end{array} \right] + \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \text{diag}\{\mathbf{S}_n^W\} \\ \hline \text{diag}\{\mathbf{S}_n^W\} & 0 \end{array} \right] \quad (10.18)$$

$$\tilde{\Lambda}_2 = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{H}_p^* \mathbf{G}_v \\ \hline \mathbf{G}_p^* \mathbf{H}_v & \mathbf{G}_p^* \mathbf{G}_v \end{array} \right] + \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \text{diag}\{\mathbf{S}_n^I\} \\ \hline \text{diag}\{\mathbf{S}_n^I\} & 0 \end{array} \right] \quad (10.19)$$

10.2 Application pratique

Dans cette partie, nous appliquons la méthode proposée à la cavité représentée à la figure 10.2. Cette cavité est constituée de 5 parois infiniment rigides (sur lesquelles on a donc $\text{grad } p = \vec{0}$) et d'un panneau souple, appelé la "structure". Les calculs sont effectués sous MATLAB et OPENBEM [Juh93, Hen02].

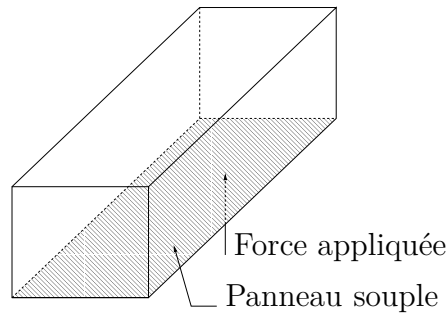


FIGURE 10.2 – Structure considérée pour l'exemple

Plusieurs calculs sont effectués, et plusieurs méthodes comparées. Le résultat du calcul “100% MES” est représenté à la figure 10.3. La méthode hybride proposée donne le résultat de la figure 10.4. Concernant le calcul BEM, un moyennage fréquentiel a été opéré afin de se trouver dans les hypothèses de la MES. Les données de calcul sont consignées dans le tableau 10.1.

Il est intéressant de mentionner que les dimensions de la cavité se prêtent à une description par MES de son comportement ; ainsi, selon la formule permettant de calculer les fréquences propres d’une cavité parallélépipédique, $f_{(n_x, n_y, n_z)} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$, la densité modale autour de 2000 Hz peut être évaluée à $d = 30$ modes/Hz.

Le calcul qui sert ici de référence est un calcul “100% BEM” dont le résultat est donné à la figure 10.5. La comparaison des trois calculs permet d’affirmer que la méthode hybride proposée améliore sensiblement la précision de la MES. Les coûts de calcul des différentes méthodes sont consignés dans le tableau 10.2.

ρ	c	Dimensions	Frequency	α (absorption coefficient)
1,25 kgm ⁻³	340 ms ⁻¹	2 × 2 × 4 m ³	1500 – 2500 Hz	0,3

TABLE 10.1 – Données du problème

Méthode	Nombre d’éléments	Durée	Erreur (% par rapport au calcul “100% BEM”)
MES	~ 100	~ 10 min.	~ 10% face à la source ~ 50-200 % loin de la source
BEM	> 5000	~ 2 jours	référence
Hybride	~ 500	~ 15 min.	~ 10% face à la source ~ 10-40 % loin de la source

TABLE 10.2 – Tableau comparatif des trois méthodes

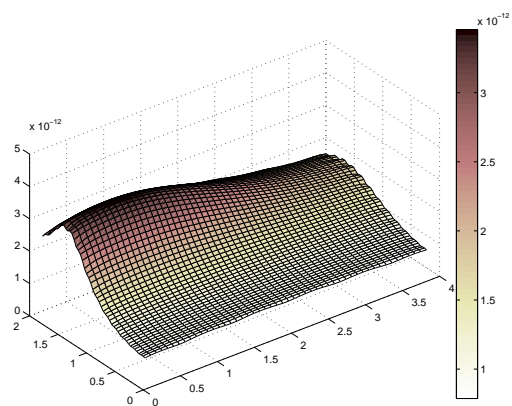


FIGURE 10.3 – W calculé par MES

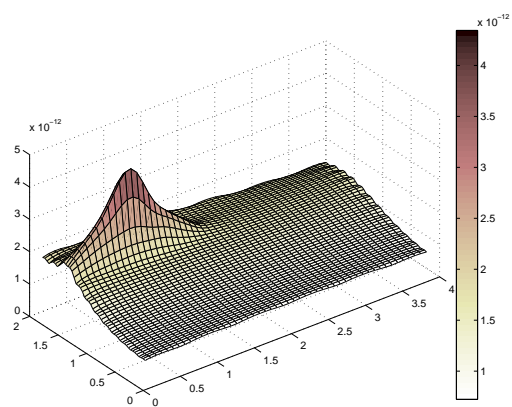


FIGURE 10.4 – W calculé par la méthode hybride

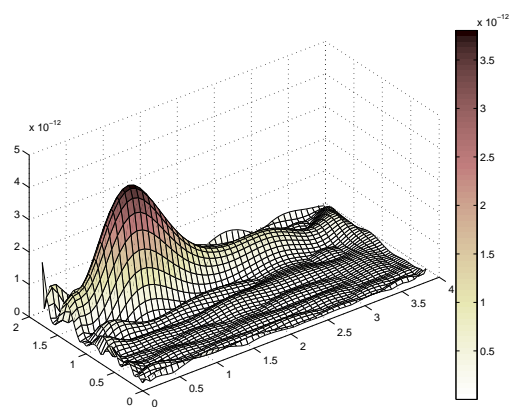


FIGURE 10.5 – W calculé par BEM

11 Différentiation fréquentielle

Dans cette section, nous développons une autre approche qui repose sur l'utilisation d'une méthode hybride FEM/MES ; dans la méthode proposée, le comportement en basses fréquences de la structure est modélisé par la méthode des éléments finis, alors que son comportement en moyennes et hautes fréquences est décrit par la MES. L'idée principale de cette méthode consiste à formuler l'équation matricielle globale en ne considérant qu'un seul maillage pour les discrétisations.

11.1 Formulation du problème

Dans cette section sont explicitées les deux formulations permettant de prendre en compte les comportements basses et hautes fréquence de la structure étudiée, qui consiste en une cavité acoustique (cf. figure 11.1).

Formulation en basses fréquences → Méthode des Éléments Finis (MEF)

Le système étudié, représenté à la figure 11.1, est constitué de plaques couplées à une cavité acoustique.

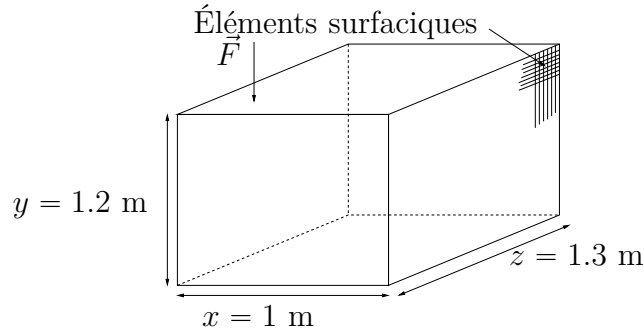


FIGURE 11.1 – Structure étudiée

Dans le domaine des basses fréquences, on considère le vecteur déplacement $\mathbf{X} = \{\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}\}^T$ sur la plaque et un vecteur pression \mathbf{p} pour le fluide, ce qui conduit à l'équation matricielle du mouvement :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xp} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{xx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{px} & \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (11.1)$$

Cette équation est bien connue et son établissement est expliqué dans de nombreuses références bibliographiques, parmi lesquelles la référence [MO92].

Dans le domaine des basses fréquences, le système est condensé au moyen d'une triple synthèse modale, comme décrit à la partie 2.2.2. Pour ce faire, les degrés de liberté relatifs aux surfaces sont notés $\mathbf{X}_s = \{\mathbf{u}_s \ \mathbf{v}_s \ \mathbf{w}_s\}^T$, ceux relatifs aux jonctions sont notés $\mathbf{X}_b = \{\mathbf{u}_b \ \mathbf{v}_b \ \mathbf{w}_b\}^T$, ce qui conduit aux matrices suivantes :

$$\mathbf{K}_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x_s x_s} & \mathbf{K}_{x_s x_b} \\ \mathbf{K}_{x_b x_s} & \mathbf{K}_{x_b x_b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{xx} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{x_s x_s} & \mathbf{M}_{x_s x_b} \\ \mathbf{M}_{x_b x_s} & \mathbf{M}_{x_b x_b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_b \end{Bmatrix} \quad (11.2)$$

Les degrés de liberté de pression \mathbf{p} sont décrits au moyen de modes de cavité Φ_p , les degrés de liberté surfaciques au moyen des modes encastrés Φ_s et de la matrice de relèvement statique Ψ_s , et les degrés de liberté de jonctions au moyen des "modes de branche" Φ_b :

$$\mathbf{p} = \Phi_p \mathbf{q}_p \quad (11.3)$$

$$\{\mathbf{u}_s \ \mathbf{v}_s \ \mathbf{w}_s\}^T = \Phi_s \mathbf{q}_s + \Psi_s \{\mathbf{u}_b \ \mathbf{v}_b \ \mathbf{w}_b\}^T \quad (11.4)$$

$$\{\mathbf{u}_b \ \mathbf{v}_b \ \mathbf{w}_b\}^T = \Phi_b \mathbf{q}_b \quad (11.5)$$

Ψ_s , Φ_p , Φ_s et Φ_b sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$(\mathbf{K}_{pp} - \omega^2 \mathbf{M}_{pp}) \Phi_p = \mathbf{0} \quad (11.6)$$

$$(\mathbf{K}_{x_s x_s} - \omega^2 \mathbf{M}_{x_s x_s}) \Phi_s = \mathbf{0} \quad (11.7)$$

$$\Psi_s = -\mathbf{K}_{x_s x_s}^{-1} \mathbf{K}_{x_s x_p} \quad (11.8)$$

$$\left[\left(\{\Psi_s \ \Phi_s\} \mathbf{K}_{xx} \{\Psi_s \ \Phi_s\}^T \mathbf{K}_{xx} \right) - \omega^2 \left(\{\Psi_s \ \Phi_s\} \mathbf{M}_{xx} \{\Psi_s \ \Phi_s\}^T \right) \right] \Phi_b = \mathbf{0} \quad (11.9)$$

L'Équation 11.1 devient alors :

$$\left(\left[\begin{array}{cc|c} \tilde{\mathbf{k}}_{x_b x_b} & \tilde{\mathbf{K}}_{x_b x_s} & \tilde{\mathbf{K}}_{x_b p} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{x_b x_s} & \tilde{\mathbf{k}}_{x_s x_s} & \tilde{\mathbf{K}}_{x_s p} \\ \hline \mathbf{0} & & \mathbf{k}_{pp} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{\mathbf{m}}_{x_b x_b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{m}}_{x_s x_s} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{M}_{px} & & \tilde{\mathbf{m}}_{pp} \end{array} \right] \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_b \\ \tilde{\mathbf{F}}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (11.10)$$

où les matrices $\tilde{\mathbf{k}}_{ij}$ et $\tilde{\mathbf{m}}_{ij}$ sont diagonales.

C'est le bruit dans la cavité qui nous intéresse ici ; aussi, nous nous intéressons à la variable énergétique $W = \frac{|p|^2}{|p_{\text{ref}}|^2}$. Dans le domaine des basses fréquences, on obtient W au moyen de l'équation 11.3 :

$$W_{\text{LF}}^n = \frac{1}{|p_{\text{ref}}|^2} |\Phi_p^n \mathbf{q}_p|^2 \quad (11.11)$$

Φ_p^n est la $n^{\text{ème}}$ ligne de la matrice Φ_p . Par ailleurs, l'équation 11.10 permet d'exprimer \mathbf{q}_p :

$$\mathbf{q}_p = \mathcal{G}(\omega) \{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T \quad (11.12)$$

où $\mathcal{G}(\omega)$ est une matrice obtenue en inversant la partie gauche de l'équation 11.10. On en déduit :

$$\begin{aligned} W_{\text{LF}}^n &= \frac{1}{|p_{\text{ref}}|^2} \left| \Phi_p^n \mathcal{G}(\omega) \{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T \right|^2 \\ &= \frac{1}{|p_{\text{ref}}|^2} \left(\Phi_p^n \mathcal{G}(\omega) \{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T \right) \left(\Phi_p^n \mathcal{G}(\omega) \{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T \right)^{T*} \\ &= \frac{1}{|p_{\text{ref}}|^2} \left(\Phi_p^n \mathcal{G}(\omega) \underbrace{\{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T}_{\mathbf{F}} \underbrace{\{\tilde{\mathbf{F}}_b^* \tilde{\mathbf{F}}_s^* \mathbf{0}\}}_{\mathbf{F}^*} \mathcal{G}^{T*}(\omega) \Phi_p^{nT*} \right) \\ &= \frac{1}{|p_{\text{ref}}|^2} \left(\underbrace{\Phi_p^n \mathcal{G}(\omega)}_{\mathcal{I}(\omega)} \underbrace{\mathbf{F} \mathcal{G}^{T*}(\omega) \Phi_p^{nT*}}_{\mathcal{J}(\omega)} \right) \\ &= \frac{1}{|p_{\text{ref}}|^2} (\mathcal{I}(\omega) \mathbf{F} \mathcal{J}(\omega)) \end{aligned} \quad (11.13)$$

Formulation en moyennes et hautes fréquences → MES

Dans cette partie, nous explicitons l'obtention de la variable W dans le domaine des moyennes et hautes fréquences. Le maillage EF est utilisé pour la discrétisation des équations de la MES. La densité d'énergie dans la cavité peut s'écrire en fonction des champs de vitesse et de pression pariétales :

$$\mathbf{W} = \mathcal{H} \left(\{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_s \mathbf{p}\}^T \right) \quad (11.14)$$

Nous expliquons ici l'obtention de la fonction \mathcal{H} . Soit N_2 le nombre d'éléments de la structure (cf. figure 11.1) et N_3 le nombre de nœuds du maillage acoustique 3D. Le vecteur \mathbf{W} est alors de dimension $(N_3, 1)$ et peut s'écrire :

$$W_n = \underbrace{\sum_{m=1}^{N_2} \frac{\Re(i\omega p_m X_m^{\perp*})}{2c_0} \iint_{S_m} \frac{\cos \theta}{\pi r_{nm}^2} dP}_{\text{Champ direct}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{N_2} \frac{\sigma_m}{c_0} \iint_{S_m} \frac{\cos \theta}{\pi r_{nm}^2} dP}_{\text{Champ réverbéré}} \quad \text{for } n \in \llbracket 1, N_3 \rrbracket \quad (11.15)$$

où :

- S_m est la surface de l'élément m ;
- r_{nm} est la distance entre le point n et le centre de l'élément m ;
- c_0 est la vitesse du son dans la cavité ;
- $X_m^{\perp*}$ est la composante du déplacement orthogonale à l'élément m , donc colinéaire au vecteur \vec{n} de la figure 11.2 ;

- θ est un angle défini à la figure 11.2. $\frac{\cos \theta}{\pi}$ correspond à la directivité considérée (ici lambertienne, mais il est possible de faire un autre choix) ;
- σ_m est le champ réverbéré.

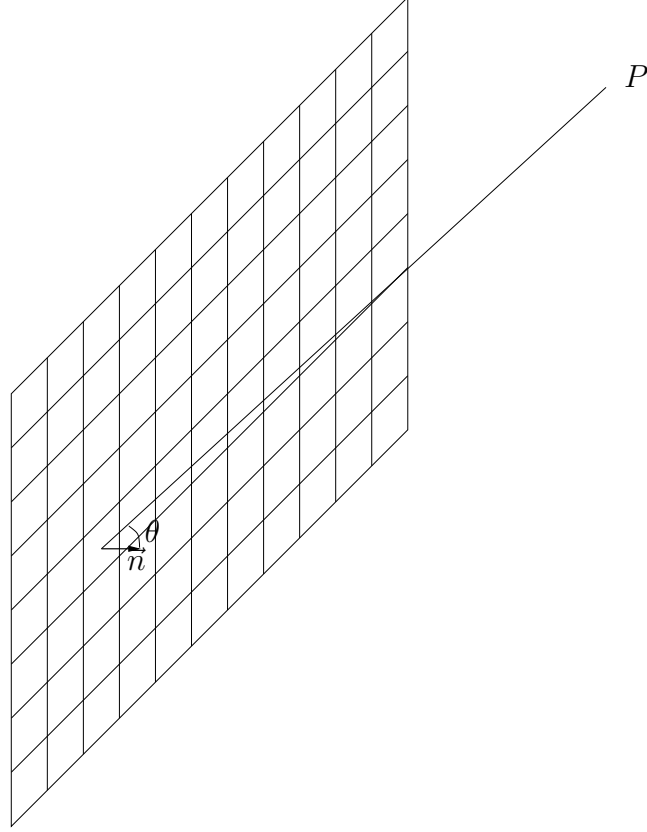


FIGURE 11.2 – Utilisation du maillage EF pour la formulation énergétique

On souhaite exprimer \mathbf{W} en fonction de la puissance injectée $\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \Re (i\omega p_m X_m^{\perp*})$. Pour ce faire, on cherche à écrire σ_m en fonction de \mathcal{P}_m . Si l'on considère un bilan de puissance sur les éléments de surface, on peut écrire une relation entre les variables énergétiques de deux facettes ξ et ζ :

$$\sigma_\xi = \frac{1 - \alpha_\xi}{S_\xi} \sum_{\substack{\zeta=1 \\ \zeta \neq \xi}} \left[(\mathcal{P}_\zeta + \sigma_\zeta) \iint_{S_\xi} \iint_{S_\zeta} \frac{\cos \theta_\xi \cos \theta_\zeta}{\pi r_{\xi\zeta}^4} dP_\xi dP_\zeta \right] \quad (11.16)$$

où $r_{\xi\zeta} = \|\overrightarrow{P_\xi P_\zeta}\|$. α_ξ est le coefficient d'absorption de l'élément ξ . S_ξ est l'aire de l'élément ξ . L'équation 11.16 peut aussi s'écrire matriciellement en introduisant une matrice \mathbf{Q} :

$$\{\sigma_1 \dots \sigma_{N_2}\}^T = \mathbf{Q} \{\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_{N_2}\}^T \quad (11.17)$$

On obtient aisément la matrice \mathbf{Q} en écrivant successivement l'équation 11.16 pour $\xi \in \llbracket 1, N_2 \rrbracket$. On peut alors obtenir \mathbf{W}_{HF} dans le domaine des moyennes et hautes fréquences :

$$\mathbf{W}_{\text{HF}} = \{W_1 \dots W_{N_2}\}^T = \mathbf{R} \{\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_{N_2}\}^T \quad (11.18)$$

La matrice \mathbf{R} est obtenue au moyen des équations 11.17 et 11.15. La $n^{\text{ème}}$ ligne du vecteur \mathbf{W}_{HF} s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\text{HF}}^n &= \mathbf{R}^n \{\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_{N_2}\}^T \\ &= \mathbf{R}^n \frac{1}{2} \Re e \left(\{p_1 v_1^* \dots p_{N_2} v_{N_2}^*\}^T \right) \\ &= \mathbf{R}^n \frac{\omega}{2} \Re e \left(\{p_1 X_1^* \dots p_{N_2} X_{N_2}^*\}^T \right) \end{aligned} \quad (11.19)$$

où \mathbf{R}^n est la $n^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{R} . On exprime maintenant p_i et \mathbf{X}_i en fonction de $\{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T$:

$$\begin{aligned} p_i &= \Phi_p^i \mathbf{q}_p \\ &= \underbrace{\Phi_p^i \mathcal{G}(\omega)}_{\mathcal{K}_i(\omega)} \{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T \end{aligned} \quad (11.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= \{\mathbf{X}_s \mathbf{X}_b\}^T \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_s & \Psi_s \Phi_b \\ \mathbf{0} & \Phi_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_b \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_s & \Psi_s \Phi_b \\ \mathbf{0} & \Phi_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha(\omega) \\ \beta(\omega) \end{Bmatrix}}_{\mathcal{L}_i(\omega)} \{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T \end{aligned} \quad (11.21)$$

où $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ sont des matrices obtenues à partir de l'équation 11.10. On en déduit l'expression de $p_i \mathbf{X}_i^*$:

$$p_i \mathbf{X}_i^* = \mathcal{K}_i(\omega) \underbrace{\{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^T \{\tilde{\mathbf{F}}_b \tilde{\mathbf{F}}_s \mathbf{0}\}^*}_{\mathbf{F}} \mathcal{L}_i^*(\omega) \quad (11.22)$$

L'équation 11.19 conduit alors à la formulation suivante :

$$\begin{aligned} W_{\text{HF}}^n &= \frac{1}{2} \omega \mathbf{R}^n \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{K}_1(\omega) \\ \vdots \\ \mathcal{K}_{N_2}(\omega) \end{bmatrix} \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1^*(\omega) & \dots & \mathcal{L}_{N_2}^*(\omega) \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega \mathbf{R}^n \text{diag} (\mathcal{K}(\omega) \mathbf{F} \mathcal{L}^T(\omega)) \end{aligned} \quad (11.23)$$

Couplage basses / moyennes / hautes fréquences

Il s'agit maintenant d'exprimer W pour un large domaine fréquentiel en utilisant les formulations qui viennent d'être définies. On peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} W_{\text{LF}}^n \\ W_{\text{HF}}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\omega \mathbf{R}^n \text{diag}(\mathcal{K}(\omega) \mathbf{F} \mathcal{L}^T(\omega)) \\ \mathcal{I}(\omega) \mathbf{F} \mathcal{J}(\omega) \end{Bmatrix} \quad (11.24)$$

On introduit maintenant deux fonctions de filtrage $\mathcal{F}_{\text{LF}}(f_c)$ et $\mathcal{F}_{\text{HF}}(f_c)$ dépendantes d'une fréquence de coupure f_c . Si $\omega < 2\pi f_c$, W_{LF} est la quantité à privilégier ; si $\omega > 2\pi f_c$, c'est W_{HF} . On peut écrire globalement :

$$W = \mathcal{F}_{\text{LF}}(f_c)W_{\text{LF}} + \mathcal{F}_{\text{HF}}(f_c)W_{\text{HF}} \quad (11.25)$$

11.2 Application pratique

Nous étudions ici le système défini à la figure 11.1. La figure 11.3 montre les résultats trouvés pour W , W_{LF} , W_{HF} and W_{ref} :

- W , W_{LF} et W_{HF} sont calculés avec un maillage fin en 2D, plus grossier en 3D ;
- W_{ref} est calculé avec un maillage très fin et constitue le calcul de référence ; il s'agit d'un calcul purement éléments finis.

Le tableau 11.1 récapitule les coûts des différentes formulations matricielles et leur domaine de validité. La méthode hybride proposée permet un gain évident.

Méthode utilisée	Tailles des matrices	Basses fréquences	Hautes fréquences
Référence (MEF)	569×569	•	•
MEF	61×61	•	—
Méthode énergétique	61×61	—	•
Méthode hybride	61×61	•	•

TABLE 11.1 – Size of matrices

Dans cet exemple, les fonctions $\mathcal{F}_{\text{LF}}(f_c)$ et $\mathcal{F}_{\text{HF}}(f_c)$ sont les suivantes :

$$\mathcal{F}_{\text{LF}}(f_c) = \frac{1}{\pi} \left(\tan^{-1} [n_c (\omega - 2\pi f_c)] + \frac{\pi}{2} \right) \quad (11.26)$$

$$\mathcal{F}_{\text{HF}}(f_c) = \frac{1}{\pi} \left(\tan^{-1} [n_c (-\omega - 2\pi f_c)] + \frac{\pi}{2} \right) \quad (11.27)$$

où n_c est un entier (on choisit ici $n_c = 6$) et $f_c = 290 \text{ Hz}$. On remarque que l'on a :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} (\mathcal{F}_{\text{LF}}(f_c)) = 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\mathcal{F}_{\text{LF}}(f_c)) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} (\mathcal{F}_{\text{HF}}(f_c)) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} (\mathcal{F}_{\text{HF}}(f_c)) = 1 \end{cases} \quad (11.28)$$

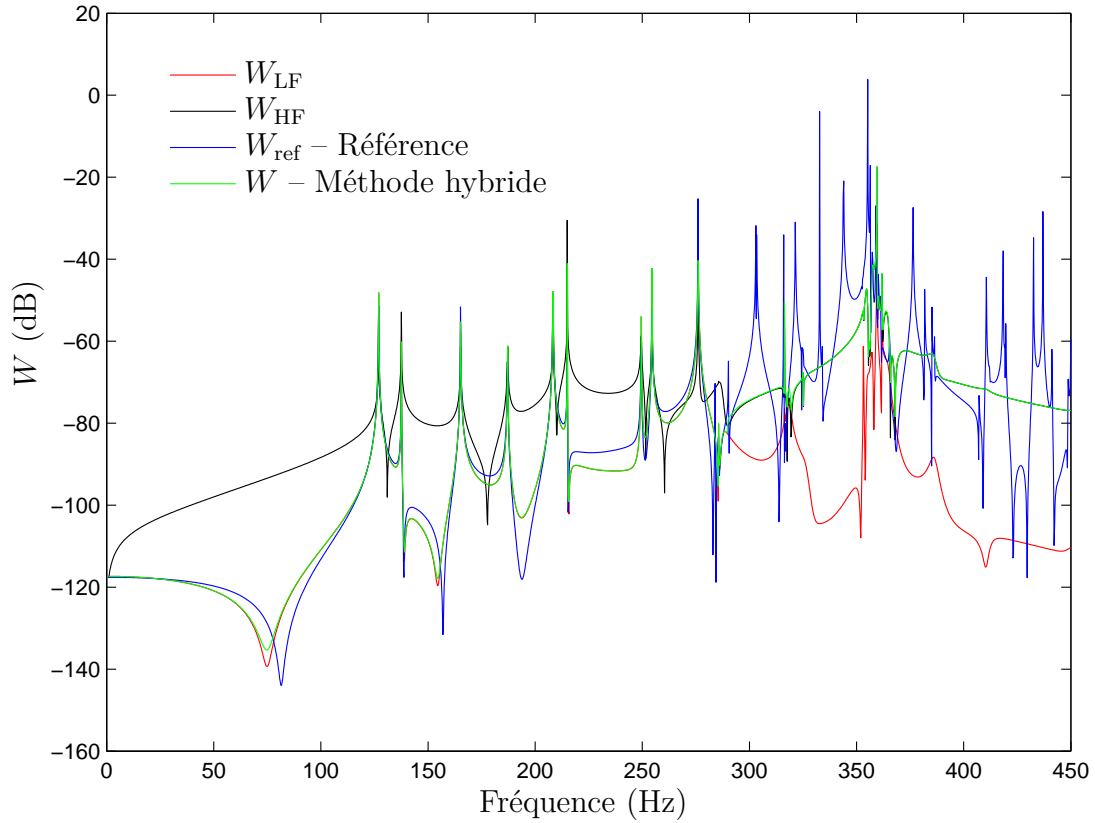


FIGURE 11.3 – Densité de puissance en un point de la cavité

Les résultats montrent que la méthode hybride proposée permet d'obtenir de bons résultats sur une large bande de fréquences ; le comportement basses fréquences est bien représenté, et le comportement en hautes fréquences présente une moyenne correcte. Il est intéressant de noter que la densité de puissance moyenne évaluée pour les hautes fréquences présente des pics. Ce phénomène est dû à la forme de la puissance injectée, qui présente elle-même des pics puisqu'elle est issue d'un calcul par éléments finis.

12 Reconstruction de champ simplifié

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas particulier du rayonnement acoustique émis par un système de freinage automobile simplifié comportant un disque et un pad. Il s'agit du travail accompli dans le cadre de la thèse de Kévin Soobbarayen [Soo14], et en particulier d'une publication qui lui est associée [SBS15].

Il n'est pas question ici de reprendre point par point le mémoire de thèse de Kévin Soobbarayen, mais de mettre en exergue les apports de ce travail de doctorat sur le plan de l'évaluation du niveau de bruit par une méthode originale.

12.1 Formulation du problème

Éléments constitutifs de la structure rayonnante

La structure, constituée d'un disque et d'un pad, est représentée à la figure 12.1. Elle présente les caractéristiques suivantes :

- **Disque et pad** : Modélisés par éléments finis, ils subissent une réduction modale de Craig & Bampton et sont assemblés au moyen des points de contact. Dans cette étude, le maillage et la condensation modale permettent évidemment d'obtenir un modèle convergé sur la plage de fréquences étudiée.
- **Contact** : 9 points de contact représentés sur la figure 12.1 ; une raideur non linéaire, imposée entre les points de contact en vis-à-vis, génère une force de contact $F_{\text{contact},z}^d = \begin{cases} k_L \delta + k_{NL} \delta^3 & \text{si } \delta < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où $\delta = X_p - X_d$ est l'enfoncement, k_L la raideur linéaire et k_{NL} la raideur non linéaire.
- **Loi de frottement** : On utilise une loi de Coulomb classique, de coefficient de frottement μ , qui génère la force de frottement $\mathbf{F}_{\text{friction}}^d = \mu F_{\text{contact},z}^d \frac{\mathbf{v}_r}{\|\mathbf{v}_r\|}$.

Notion d'instabilité

Avant d'introduire la notion de rayonnement, il convient d'explicitier la phénoménologie du crissement de frein. L'équation régissant le mouvement de l'assemblage disque / pad s'écrit comme suit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) + \mathbf{F} \quad (12.1)$$

\mathbf{K} , \mathbf{C} et \mathbf{M} sont respectivement les matrices de raideur, d'amortissement et de masse du système assemblé. \mathbf{X} est le vecteur des degrés de liberté généralisés, \mathbf{F}_{NL} est la force non linéaire qui regroupe l'ensemble des forces issues du contact défini plus

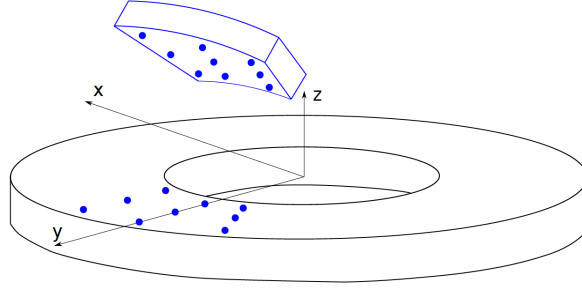


FIGURE 12.1 – Structure considérée. Figure issue de l'article de Kévin Soobbarayen [SBS15]

haut, et \mathbf{F} est la force issue de l'application d'une pression sur le pad. Physiquement, cette pression est obtenue par des vérins permettant de commander la pression de freinage voulue par le conducteur.

L'analyse de stabilité du système consiste à résoudre le problème aux valeurs propres complexes relatif à l'équation 12.1 :

$$\left(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + (\mathbf{K} - \mathbf{J}_{\text{NL}, \mathbf{x}_g}) \right) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (12.2)$$

Les couples (λ_i, Φ_i) sont les valeurs et les vecteurs propres du système. $\mathbf{J}_{\text{NL}, \mathbf{x}_g}$ est la jacobienne associée à la force non linéaire \mathbf{F}_{NL} évaluée au voisinage de la position d'équilibre glissant \mathbf{x}_g . Cette position d'équilibre glissant est obtenue en résolvant le problème statique :

$$\mathbf{K} \mathbf{x}_g = \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_g) + \mathbf{F} \quad (12.3)$$

Les valeurs propres λ_i sont complexes. Si leur partie réelle est non nulle, alors il s'agit d'un mode instable. Dans cette étude, deux cas sont étudiés, comptant respectivement un et deux modes instables. Le tableau 12.1 répertorie ces deux cas. L'objectif de ce mémoire n'est pas d'aller plus loin dans l'étude de la notion de stabilité ; pour davantage d'information, on se reportera à la thèse de Kévin Soobbarayen [Soo14] et aux références bibliographiques qu'elle contient.

Cas	Valeur de μ	Fréquence f_1	Fréquence f_2
1	0,72	929,8 Hz	–
2	0,74	930,3 Hz	9418 Hz

TABLE 12.1 – Détail des deux cas d'étude

12.2 Reconstruction du bruit rayonné

Principe de la méthode employée

L'objectif de la méthode est d'évaluer le bruit rayonné à partir du champ de vitesse pariétal du système disque / pad. La méthode des éléments de frontière semble au premier abord appropriée à ce type de problème. Une méthode d'éléments finis "infinis" pourrait également être envisagée. Néanmoins, plusieurs difficultés apparaissent :

- le champ de vitesse est calculé en fréquentiel et non en temporel ;
- un mode instable est susceptible de rayonner, mais ses harmoniques peuvent avoir une contribution importante également ;
- le coût du calcul par une méthodes éléments finis ou éléments de frontière est prohibitif, surtout s'il s'agit de hautes fréquences et, dans le cas des éléments finis, si les points d'écoute sont éloignés du système (l'espace à mailler est d'autant plus grand).

La méthode proposée ici suit donc les étapes suivantes :

1. évaluation de l'importance des différentes harmoniques du mode étudié selon un critère lié à la vitesse quadratique pariétale → schéma 12.2 ;
2. calcul du champ de pression pariétal en fonction du champ de vitesse par BEM, pour toutes les harmoniques à prendre en compte ;
3. évaluation de la directivité du champ rayonné par un calcul BEM → schéma 12.3 ;
4. calcul de la pression quadratique en tout point de l'espace en utilisant la directivité trouvée précédemment et une fonction d'éloignement en $\frac{1}{r^2}$.

Toutes ces étapes sont assorties de critères permettant d'évaluer la fiabilité des résultats obtenus. Les schémas 12.2 et 12.3, issus de l'article [SBS15], permettent d'illustrer les algorithmes utilisés.

Résultats

Les figures 12.4 et 12.5 montrent les résultats de la convergence du calcul de la directivité pour les cas 1 (un seul mode instable) et 2 (deux modes instables) décrits au tableau 12.1. Les figures 12.6, 12.7 et 12.8 montrent la reconstruction du champ acoustique pour différentes composantes harmoniques. Les résultats sont très bons et la méthode présente plusieurs avantages :

- Une fois la directivité évaluée, le calcul du bruit est presque instantané ;
- il est possible d'évaluer la précision du résultat sans faire de calcul BEM complet. Néanmoins, il subsiste également des inconvénients notoires :
- les calcul de la pression pariétale par BEM reste nécessaire ;
- le calcul de la pression pariétale, de même que les calculs nécessaires à l'évaluation de la directivité, sont à refaire dès que la vitesse pariétale change (on pense par exemple à un problème d'optimisation de forme...).

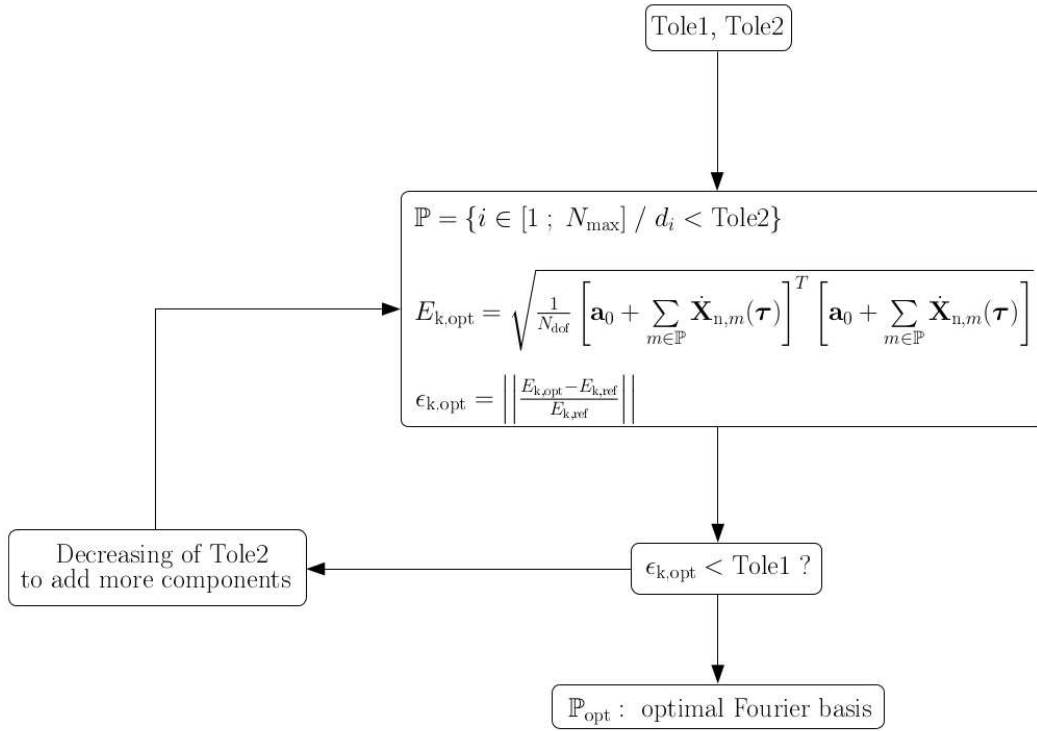


FIGURE 12.2 – Optimisation de la base de Fourier. Figure issue de l'article [SBS15].

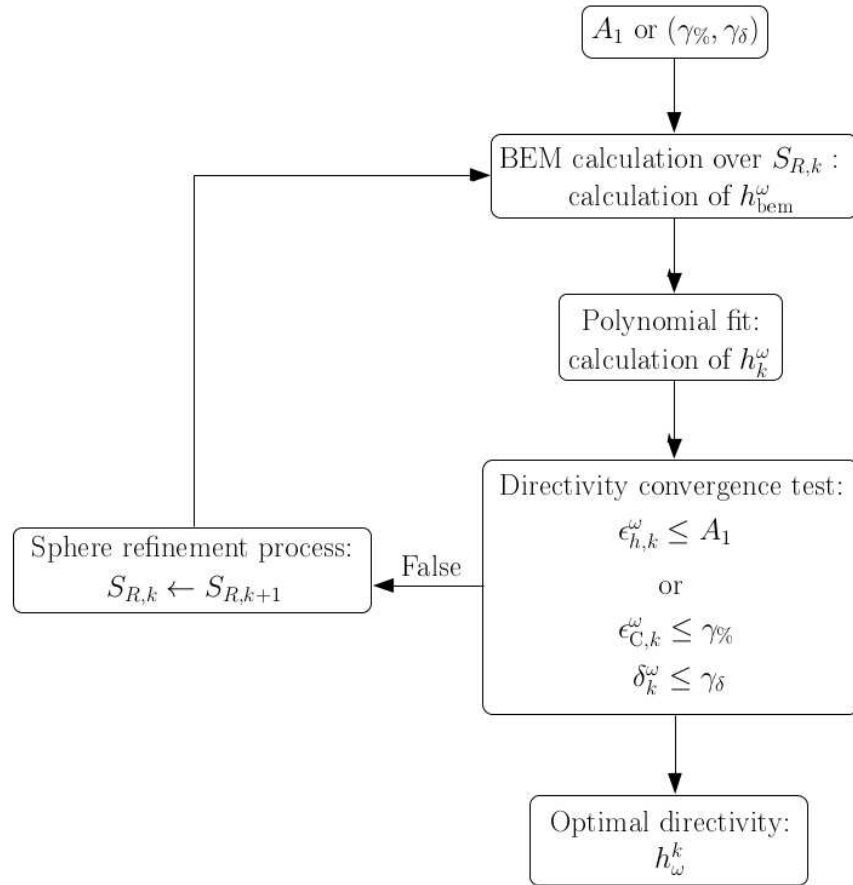


FIGURE 12.3 – Interpolation de la directivité. Figure issue de l'article [SBS15].

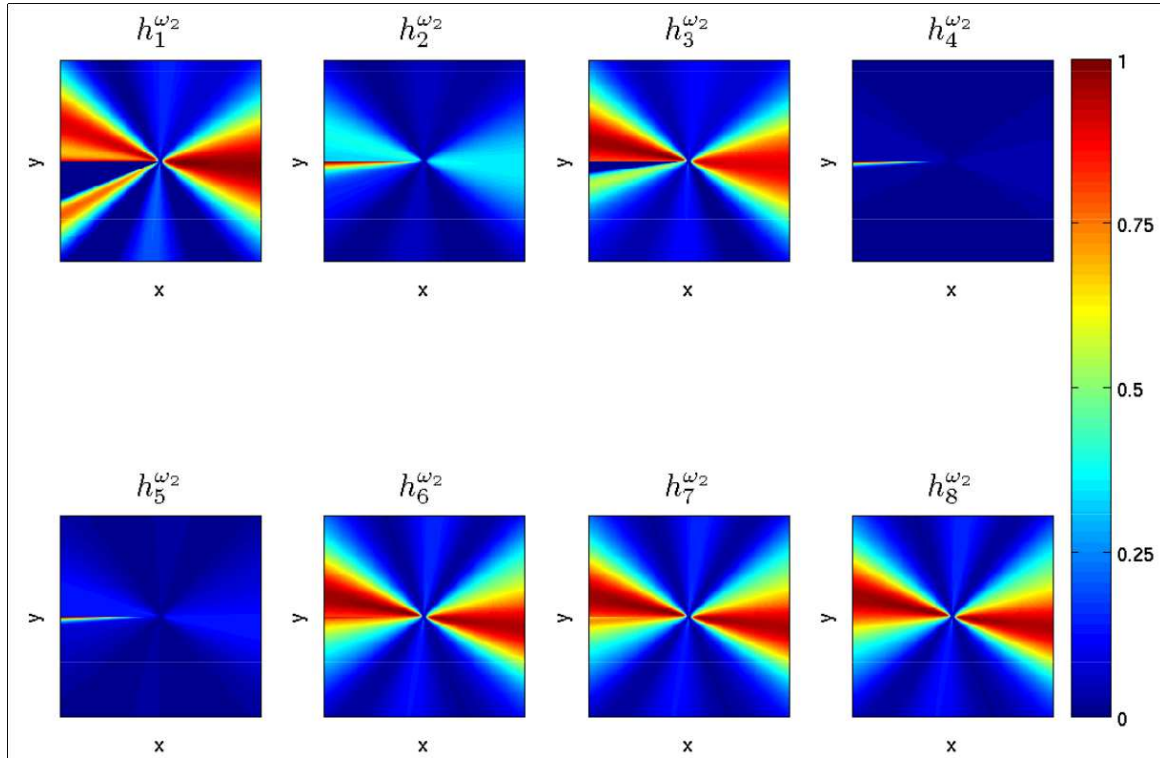


FIGURE 12.4 – Convergence de la directivité en fonction du nombre de calculs BEM utilisés pour l'approximation – cas 1. Figure issue de l'article [SBS15].

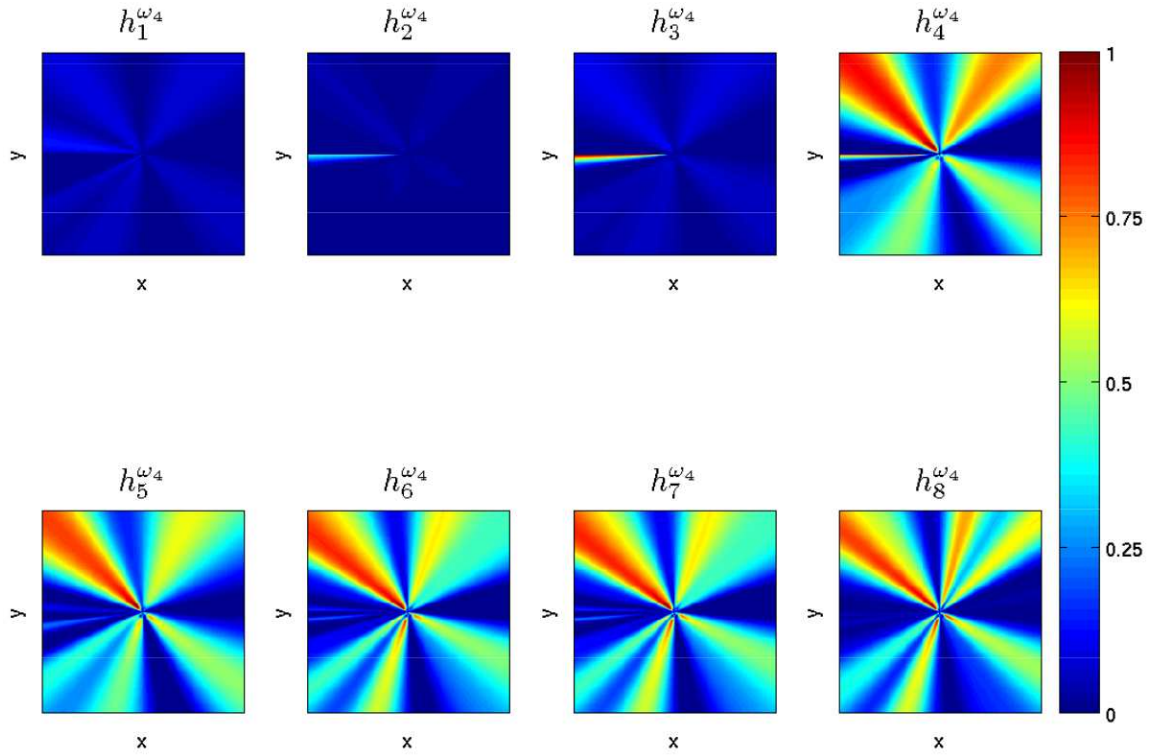


FIGURE 12.5 – Convergence de la directivité en fonction du nombre de calculs BEM utilisés pour l'approximation – cas 2. Figure issue de l'article [SBS15].

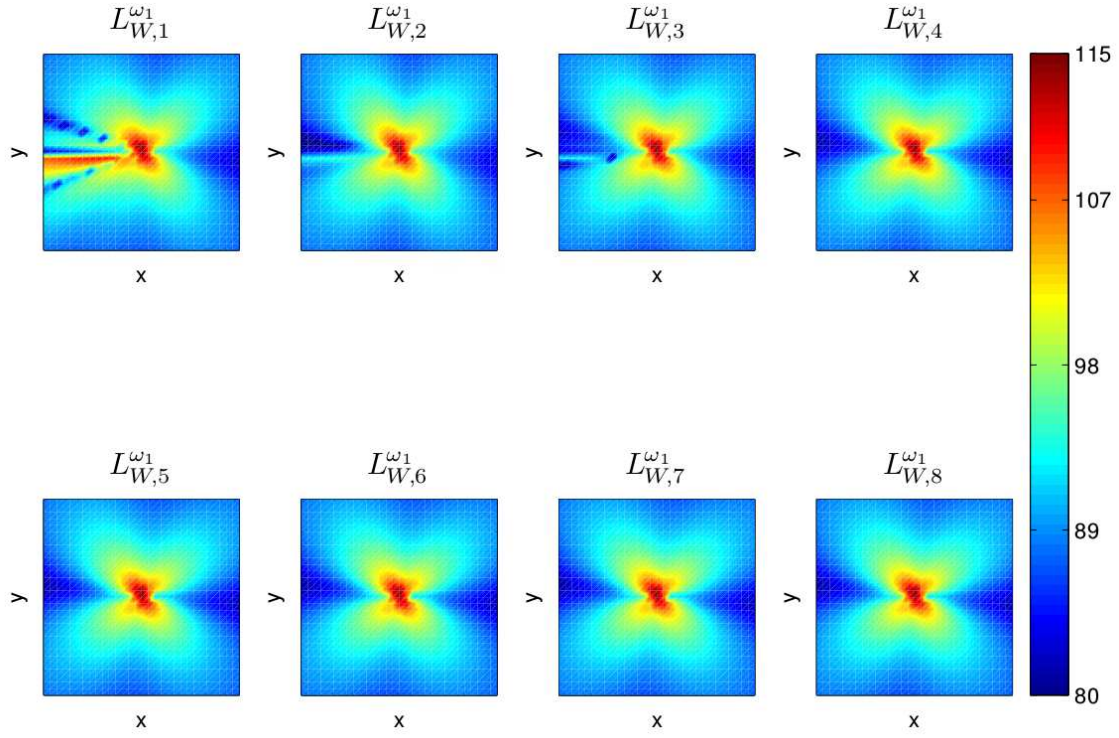


FIGURE 12.6 – Reconstruction du champ acoustique – cas 1, harmonique ω_1 . Figure issue de l'article [SBS15].

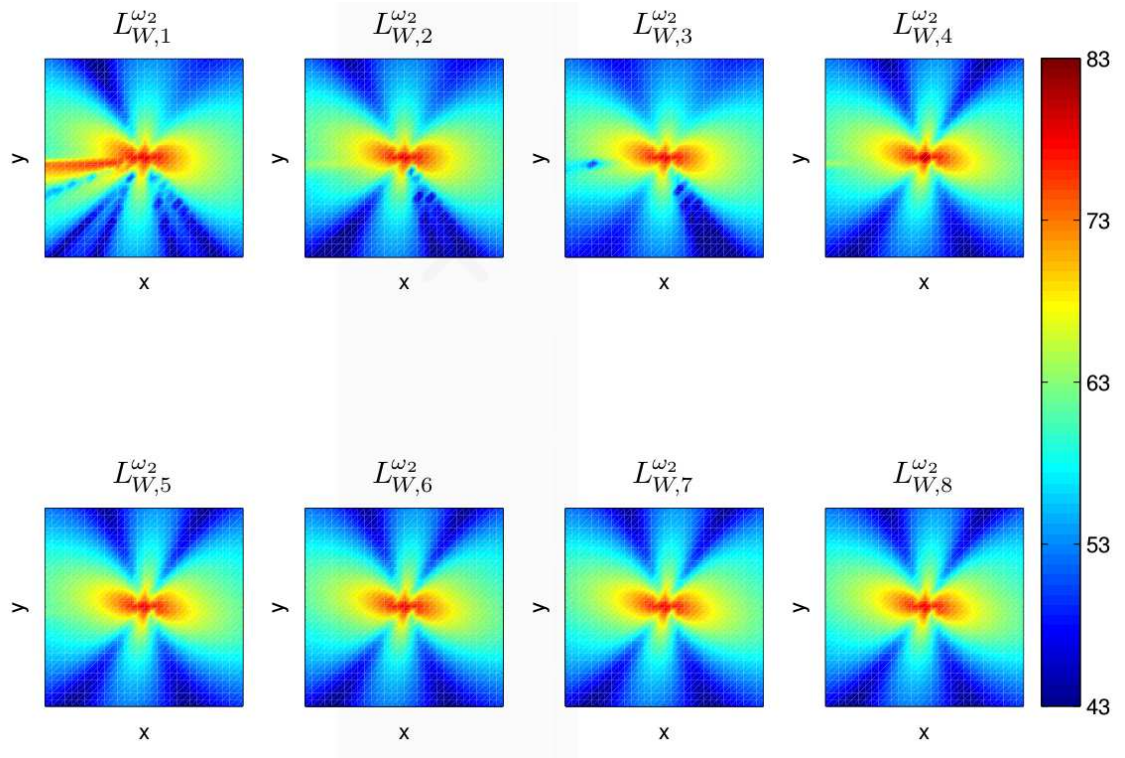


FIGURE 12.7 – Reconstruction du champ acoustique – cas 1, harmonique ω_2 . Figure issue de l'article [SBS15].

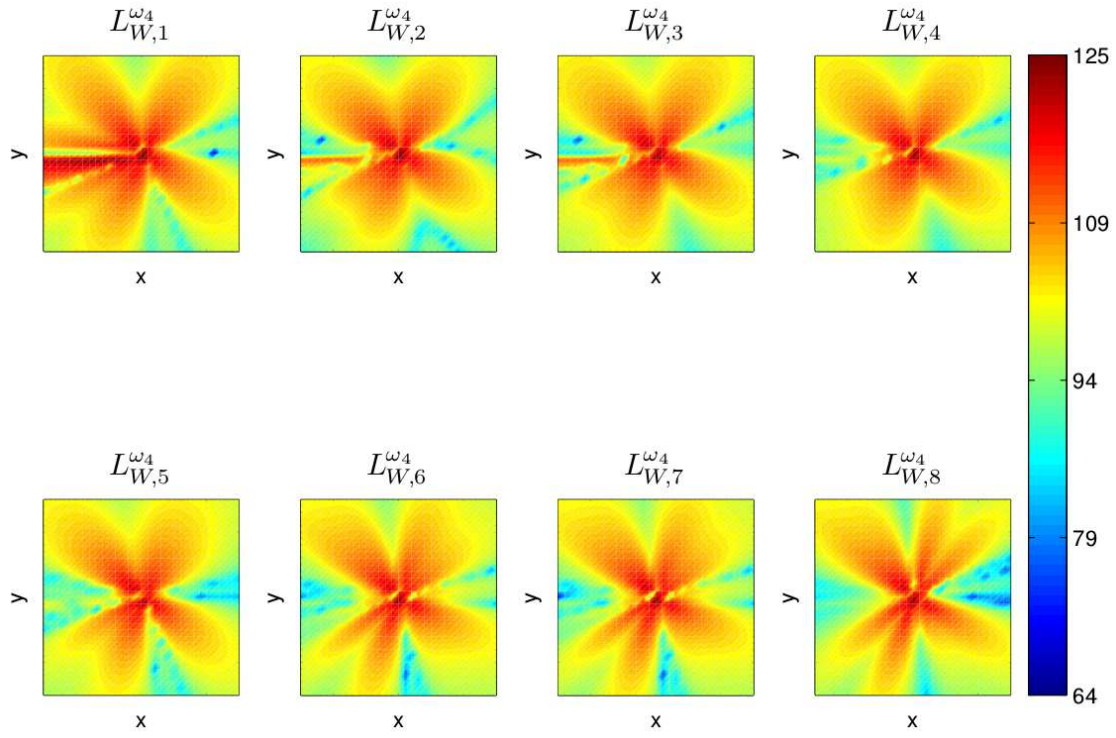


FIGURE 12.8 – Reconstruction du champ acoustique – cas 2, harmonique $\omega_4 = 2\pi(f_2 - 2f_1)$. Figure issue de l'article [SBS15].

13 Bilan de la troisième partie

Dans cette partie ont été présentées les méthodes mixant différentes approches, cinématiques ou énergétiques. Trois types de techniques ont été présentées.

Les deux premières permettent d'envisager une étude vibroacoustique pertinente sur une large bande de fréquences. Ceci permet essentiellement de mener une étude large bande au moyen d'un unique modèle et d'un unique maillage. Pour les deux méthodes présentées, c'est une quantité énergétique qui est calculée, et les variables cinématiques ne sont pas toujours récupérables, ce qui peut parfois être rédhibitoire...

La troisième approche décrite est différente et répond à une problématique particulière, le rayonnement acoustique d'un système de freinage. De nombreuses études concernent les phénomènes d'instabilité de tels systèmes, mais peu de chercheurs se sont intéressés au bruit résultant. Outre la complexité du problème (couplage fluide / structure et milieu semi-infini), c'est surtout le coût de calcul qui rend l'étude ardue. Nous proposons, dans le travail de thèse de Kévin Soobbarayen, d'évaluer la pression quadratique, ce qui permet de développer une méthode rapide basée sur l'évaluation préalable de la directivité. Il est évident que si c'est la pression qui est recherchée, la méthode ne fonctionne plus... et c'est là sa principale limitation.

Conclusion

Ce mémoire a permis de présenter les principaux travaux que j'ai effectués depuis la soutenance de mon doctorat. L'organisation du présent manuscrit devrait permettre de classer les différentes approches proposées et mettre en exergue leurs atouts dans des contextes spécifiques.

Si l'on devait faire la synthèse de par application pratique des différentes méthodes répertoriées, on pourrait faire le distinguo suivant :

1. On souhaite faire l'étude large bande d'un système complexe en faisant appel à un unique modèle → partie I et partie III :
 - si l'utilisation de variables cinématiques (champ de vitesse, de pression...) revêt une grande importance, les méthodes de synthèses modale généralisées présentées à la partie III sont particulièrement indiquée ;
 - si l'on peut se contenter d'une description énergétique, c'est la partie II qu'il faudra consulter.
2. On souhaite travailler en moyennes et hautes fréquences uniquement → partie II. La Méthode Énergétique Simplifiée (MES) dont il est traité est appliquée dans différents contextes :
 - détection de source ;
 - optimisation de forme ;
 - optimisation de l'absorption pariétale.
3. On s'intéresse au cas particulier d'une structure rayonnante en espace semi-infini → partie III.

Les travaux présentés dans ce mémoire font état de l'avancement d'une partie des travaux du groupe de recherche dans lequel ils ont été effectués. Plusieurs doctorants y ont participé, plusieurs chercheurs confirmés également. Chaque idée apporte son lot d'inconvénients et de perspectives d'amélioration, que nous allons ici tenter de synthétiser globalement :

- dans le domaine des moyennes et hautes fréquences et pour les problèmes traités au moyen de méthodes énergétiques, il n'existe toujours pas de méthode permettant de remonter à la phase et donc aux grandeurs cinématiques. Il est vrai que la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) développée au LMT permet des études cinématiques en moyennes et hautes fréquences [LARB01], et c'est un bon moyen de palier l'inconvénient des méthodes présentées dans ce manuscrit. Toutefois, la TVRC est loin des performances de la MES en terme de vitesse de calcul et de simplicité d'écriture ;

CONCLUSION

- en ce qui concerne les méthodes basées sur la synthèse modale, il semble que le maximum ait été atteint avec les développements en ω^n et les synthèses multiples. Au niveau des applications pratiques, des travaux sont en cours dans le cadre d'un système de freinage. La double synthèse modale devrait permettre de diminuer significativement le nombre de degrés de liberté de l'interface de contact. En effet, dans le problème traité dans la partie 12, nous nous sommes limités à 9 degrés de liberté de contact. Il s'agit là d'une troncature **spatiale** de la prise en compte de l'interface qui n'est pas satisfaisante. Il est beaucoup plus judicieux de considérer l'ensemble des degrés de liberté de contact, puis de les condenser au moyen d'une double synthèse modale qui permettrait ainsi une troncature **fréquentielle**, qui limiterait certes la bande de fréquence envisageable, mais qui conserverait la *réalité* du contact ;

Le présent mémoire ne constitue donc pas l'aboutissement d'un travail personnel, mais une étape importante du cheminement scientifique de mon action au sein du groupe de recherche auquel j'appartiens. En cela, je ne peux conclure ce manuscrit qu'en remerciant encore une fois tous les membres de ce groupe de recherche, et plus généralement du laboratoire LTDS.

A Publications relatives aux travaux effectués : approche modale

Les articles de journaux sont consignés dans le second document intitulé “publications relatives aux travaux effectués”.

A.1 Articles de journaux :

1. S. Besset et L. Jézéquel, *Modal criteria for robust optimization of vibroacoustic systems*, Optimization Letters, 8(4), 1567-1576, 2014.
2. D. Brizard, S. Besset, L. Jézéquel, B. Troclet, *Design and test of a friction damper to reduce engine vibrations on a space launcher*, Archive of Applied Mechanics, 83, 799-815, 2013.
3. D. Brizard, S. Besset, L. Jézéquel, B. Troclet, *Determinantal method for locally modified structures. Application to the vibration damping of a space launcher*, Computational Mechanics, 50, 631-644, 2012.
4. S. Besset et L. Jézéquel : *Modal criteria for optimization of structures through active structural acoustic control*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 82 (12), 1560-1573, 2010.

A.2 Chapitre d'ouvrage :

1. S. Besset et L. Jézéquel : *Optimization of the Dynamic Behaviour of Complex Structures Based on a Multimodal Strategy*, Chapitre de l'ouvrage “Numerical Analysis - Theory and Application”, pages 97–120. Jan Awrejcewicz, InTech, 2011.

A.3 Articles de congrès :

1. M. Monteil, S. Besset et J.-J. Sinou, *Efficient modal reduction methods for frictional contact systems – Application to disk brake squeal*, VISHNO, Aix en Provence, Juin 2014
2. G. Hurel, J.-F. Diebold, S. Besset et L. Jézéquel : *Influence of the gyroscopic effects on friction induced vibration in aircraft braking in system*, SAE Brake Colloquium & Exhibition, San Diego, Californie, États-Unis, 2012.

3. G. Hurel, J.-F. Diebold, S. Besset et L. Jézéquel, *Méthode de réduction d'un système de frein multi-disque en vue d'un calcul transitoire non-linéaire de vibrations induites par friction*, CSMA 2013 11e Colloque National en Calcul des Structures 13-17 Mai 2013.
4. G. Hurel, J.-F. Diebold, S. Besset et L. Jézéquel, *Modélisation transitoire des vibrations des freins aéronautiques*, 1^{ères} Journées Jeunes Chercheurs en Vibrations, 11 avril, Marne-la vallée, 2013.
5. S. Besset et L. Jézéquel : *Vibroacoustic optimization of complex structures using vibration criteria between substructures*, International Modal Analysis Conference (IMAC XXVI), Saint Louis, Missouri, USA, 2008.
6. S. Bourmich, S. Besset, L. Jézéquel, *Vibro-acoustic quality of vehicle passenger compartments at low frequencies*, 5th International Styrian Noise, Vibration and Harshness Congress, Graz, Autriche, 2008.
7. S. Bourmich, S. Besset et L. Jézéquel *Optimisation des prestations vibro-acoustiques des structures automobiles : application un pare-brise*, 16^{ème} Colloque Vibrations Chocs et Bruits, Ecully, France, 2008.
8. S. Bourmich, S. Besset et L. Jézéquel, *Optimisation robuste des structures d'automobile réduites par double synthse modale*, Journée d'étude SIA "L'optimisation d'aujourd'hui à demain : enjeux et perspectives", Paris La Défense, 2012.
9. D. Brizard, S. Besset, L. Jézéquel et B. Troclet, *Suivi de valeurs propres par une méthode déterminantale pour l'amortissement de structures spatiales*, CSMA, Giens, France, 2011.

B Publications relatives aux travaux effectués : approche énergétique

Les articles de journaux sont consignés dans le second document intitulé “publications relatives aux travaux effectués”.

B.1 Articles de journaux :

1. R. Troian, S. Besset et F. Gillot, *Shape optimization under vibroacoustic criteria in the mid-high frequency range*, Journal of Computational Acoustics, Volume 22, Issue 02, Juin 2014.
2. M. Chabchoub, S. Besset et M.N. Ichchou, *Identification of acoustic sources through an inverse energy method*, Inverse Problems in Science & Engineering, 19(7), 903-919, 2011.
3. M. Chabchoub, S. Besset et M.N. Ichchou, *Structural sources identification through an inverse mid-high frequency energy method*, Mechanical Systems and Signal Processing, 25(8), 2948-2961, 2011.
4. S. Besset et M.N. Ichchou : *Acoustic absorbtion material optimisation in the mid-high frequency range*, Applied acoustics, 72(9), 632-638, 2011.

B.2 Articles de congrès :

1. R. Troian, S. Besset et F. Gillot, *Shape optimization under vibroacoustic criteria in the mid-high frequency range using gradient-based approach*, EUROODYN 2014, Porto, Portugal, 30 June - 2 July 2014.
2. R. Troian, S. Besset et F. Gillot, *Shape optimization under vibroacoustic criteria in the mid-high frequency range*, WCSMO-10, Orlando, FL, USA, May 19-24, 2013.
3. M. A. Chabchoub, S. Besset, M. N. Ichchou et L. Jézéquel : *Structural sources identification in the 2d plate using simplified energy method*, Impact 2010, Djerba, Tunisie, 2010.
4. M. A. Chabchoub, S. Besset et M. N. Ichchou : *Boundary and volume sources identification using an inverse energy method*, ACMA 2010, Marrakech, Maroc, 2010.

5. M. N. Ichchou, M. A. Chabchoub, O. Bareille et S. Besset : *An inverse mid-high frequency energy method : formulation and applications*, ICSV17 - International Congress on Sound and Vibration, Le Caire, Égypte, 2010.
6. S. Besset, M.N Ichchou, M.A. Chabchoub et L. Jézéquel : *A simplified energy method for acoustic source identification*, 2nd International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and EarthQuake Engineering, Rhodes, Grèce, 2009.
7. M.A. Chabchoub, S. Besset, M.N Ichchou et L. Jézéquel : *Application d'une méthode énergétique simplifiée pour la détection de sources acoustiques*, CMSM'09, Hammamet, Tunisie, 2009.

C Publications relatives aux travaux effectués : approche mixte

Les articles de journaux sont consignés dans le second document intitulé “publications relatives aux travaux effectués”.

C.1 Articles de journaux :

1. K. Soobbarayen, J-J. Sinou, S. Besset, *Numerical study of friction-induced instability and acoustic radiation - Effect of ramp loading on the squeal propensity for a simplified brake model*, Journal of Sound and Vibration, 333, 5475-5493, 2014.
2. K. Soobbarayen, S. Besset, J-J. Sinou, *A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise and vibration*, Mechanical Systems and Signal Processing, 50-51, 732-756, 2015.
3. K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, *Noise and vibration for a self-excited mechanical system with friction*, Applied Acoustics, 74(10), 1191-1204, 2013.
4. K. Soobbarayen, S. Besset and J-J. Sinou, *Influence of physical parameters and operating conditions for structural integrity of mechanical system subjected to squeal noise*, Key Engineering Materials, 1076-1084, 2013.
5. S. Besset, M.N. Ichchou et L. Jézéquel, *A coupled BEM and energy flow method for mid-high frequency internal acoustic*, Journal of Computational Acoustic, 18(1), 69-85, 2010.
6. S. Besset, *A low-high frequency formulation for fast acoustic calculations*, Journal of Computational Acoustics, 20(3), 1250011 (10 pages), 2012.

C.2 Articles de congrès :

1. K. Soobbarayen, J-J. Sinou, S. Besset, *Numerical study of the effect of loading condition on the propensity of squeal noise and vibration*, Eurobrake, Lille, France, May 13-15, 2014.
2. K. Soobbarayen, S. Besset, J-J. Sinou, *A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise*, Euyrodyn, Porto, Portugal, 30th June-2nd July, 2014.

3. K. Soobbarayen, S. Besset et J-J. Sinou, *Méthode simplifiée pour le calcul du rayonnement acoustique de structures sujettes au crissement*, Congrès Français d'Acoustique, Poitiers, France, 22-25 avril, 2014.
4. K. Soobbarayen, J.-J. Sinou et S. Besset, *Vibration non-linéaire et rayonnement acoustique des systèmes frottants sujets au crissement*, 11^{ème} Colloque National en Calcul des Structures, 13-17 Mai, Giens, 2013.

Bibliographie

- [Bai49] M. R. Bai. Application of bem-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *Journal of Acoustical Society of America*, 92, 533-549.
- [Bal96] E. Balmès. Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. In *Proceedings of IMAC*, pages 204–210, 1996.
- [Bam66] R. M. Bamford. A modal combination program for dynamic analysis of structures. *Technical Report NASA-CR-82877*, NASA, Jet Propulsion Laboratory, 1966.
- [BBJ08a] S. Bourmich, S. Besset, and L. Jézéquel. Optimisation des prestations vibro-acoustiques des structures automobiles : Application à un pare-brise. *16^{ème} Colloque Vibrations, Chocs et Bruits, Lyon, France*, Juin 2008.
- [BBJ08b] S. Bourmich, S. Besset, and L. Jézéquel. Modal based structural-acoustic optimization strategy to the target cascading of sound and vibration quality specifications. *International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, Shanghai*, October 2008.
- [BBJ⁺08c] S. Bourmich, S. Besset, L. Jézéquel, C. Delval, and Y. Tourbier. A hierarchical optimization strategy for vibro-acoustic quality of vehicle passenger compartments at low frequencies. *5th International Styrian Noise, Vibration and Harshness Congress, Graz, Austria*, June 2008.
- [BBJT11] D. Brizard, S. Besset, L. Jézéquel, and B. Troclet. Suivi de valeurs propres par une méthode déterminantale pour l’amortissement des structures spatiales. *CSMA, Gien, France*, Mai 2011.
- [BBJT12a] D. Brizard, S. Besset, L. Jézéquel, and B. Troclet. Design and test of a friction damper to reduce engine vibrations of a space launcher. *Archive of Applied Mechanics*, 83(5) :799–815, 2012.
- [BBJT12b] D. Brizard, S. Besset, L. Jézéquel, and B. Troclet. Determinantal method for locally modified structures. application to the vibration damping of a space launcher. *Computational Mechanics*, 50(5) :631–644, 2012.
- [Bes06] S. Besset. *Optimisation du Comportement Vibro-acoustique des Structures à l’aide d’une Synthèse Modale Généralisée*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, Écully, France, 2006.
- [Bes12] S. Besset. A low-high frequency formulation for fast acoustic calculations. *Journal of Computational Acoustics*, 20(3) :10 pages, 2012.

- [BH85] J.F. Baldwin and S.G. Hutton. Natural modes of modified structures. *AIAA Journal*, 23(11) :1737–1743, 1985.
- [BI11] S. Besset and M.N. Ichchou. Acoustic absorbtion material optimisation in the mid-high frequency range. *Applied acoustics*, 72(9) :632–638, 2011.
- [bib75] *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems : Theory and Application*. 1975.
- [bib87] *Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams*. NCA Publication, 1987.
- [BIJ10] S. Besset, M.N. Ichchou, and L. Jézéquel. A coupled bem and energy flow method for mid-high frequency internal acoustic. *Journal of Computational Acoustic*, 18(1) :69–85, 2010.
- [BJ07] S. Besset and L. Jézéquel. Optimization of structural dynamic behaviour based on effective modal parameters. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(5) :523–542, 2007.
- [BJ08a] S. Besset and L. Jézéquel. Dynamic substructuring based on a double modal analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(1), 2008.
- [BJ08b] S. Besset and L. Jézéquel. Dynamic substructuring based on a double modal analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(1) :5 pages, 2008.
- [BJ08c] S. Besset and L. Jézéquel. A modal analysis method to study fluid-structure coupling in hollow parts of a structure. *Journal of Computational Acoustics*, 16(2) :257–277, 2008.
- [BJ08d] S. Besset and L. Jézéquel. Modal criteria for optimizing the acoustic behaviour of a coupled fluid-structure system based on a systemic approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(10) :1347–1373, 2008.
- [BJ08e] S. Besset and L. Jézéquel. Vibroacoustical analysis based on a multimodal strategy : Triple modal synthesis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(3), 2008.
- [BJ08f] S. Besset and L. Jézéquel. Vibroacoustical analysis based on a multimodal strategy : Triple modal synthesis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(3) :6 pages, 2008.
- [BJ09] S. Besset and L. Jézéquel. Optimization of characteristics of porous materials based on a modal synthesis method. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 28 :102–109, 2009.
- [BJ10] S. Besset and L. Jézéquel. Modal criteria for optimization of structures through active structural acoustic control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82(12) :1560–1573, 2010.
- [BJ13] S. Besset and L. Jézéquel. Modal criteria for robust optimization of vibroacoustic systems. *Optimization Letters*, accepted in 2013.

- [Bou12] S. Bourmich. *Optimisation de la qualité vibro-acoustique des véhicules*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, Écully, France, 2012.
- [Bri11] D. Brizard. *Contrôle des vibrations de charge utile sur lanceur spatial*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, Écully, France, 2011.
- [CB68] R. R. Craig and Mervyn C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [CBI11a] M. Chabchoub, S. Besset, and M.N. Ichchou. Identification of acoustic sources through an inverse energy method. *Inverse Problems in Science & Engineering*, 19(7) :903–919, 2011.
- [CBI11b] M. Chabchoub, S. Besset, and M.N. Ichchou. Structural sources identification through an inverse mid-high frequency energy method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8) :2948–2961, 2011.
- [CC76] R. R. Craig and C-J Chang. A review of substructure coupling methods for dynamic analysis. *Technical report, NASA*, 1976.
- [CC77a] R. R. Craig and C-J Chang. On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. In *18th Structures, Structural Dynamics and Material Conference*. AIAA paper 77-405, March 1977.
- [CC77b] R. R. Craig and C-J Chang. Substructure coupling for dynamic analysis and testing. *Technical Report NASA-CR-2781, NASA*, 1977.
- [Cha10] M. Chabchoub. *Méthodes Energétiques Simplifiées Inverses : formulations et applications*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2010.
- [CHK72] J. D. Collins, W. C. Hurty, and B. Kennedy. Review and development of modal synthesis techniques. *Technical Report NASA-CR-170694, NASA*, 1972.
- [CPP09] N. Totaro C. Pezerat, Q. Leclère and M. Pachebat. Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis technique. *Journal of Sound and Vibration*, 326 :540–556, 2009.
- [Cra81] R. R. Craig. Generalized substructure coupling procedure for damped systems. In *Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 22 nd*, volume 20, pages 442–444, Atlanta, Ga., 1981.
- [Cra89] R. R. Craig. Component mode synthesis for model order reduction of non- classically damped systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 12 :577–584, 1989.
- [dCBmfs04] D Rixen. A dual Craig-Bampton method for dynamic substructuring. A dual craig-bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :383–391, 2004.
- [Dow79] E.H. Dowell. On some general properties of combined dynamical systems. *Trans. ASME*, 46 :206–209, 1979.

- [GS72] S. Goldenberg and M. Shapiro. A study of modal coupling procedures for the space shuttle. *Technical Report NASA-CR-112252*, NASA, 1972.
- [GS91] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer Verlag, 1991.
- [Hal76] J.O. Hallquist. An efficient method for determining the effects of mass modifications in damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 44(3) :449–459, 1976.
- [Har05] P. Hardy. *Méthodes énergétiques simplifiées en moyennes et hautes fréquences : Théorie et applications industrielles*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2005.
- [HB85] A. L. Hale and L. A. Bergman. The dynamic synthesis of general non-conservative structures from separately identified substructure models. *Journal of Sound and Vibration*, 98(3) :431–446, 1985.
- [HDG02] M. A. Hamdi, H. Defosse, and L. Gagliardini. Hybrid inverse boundary element method for the determination of the optimal spectral characteristics of complex radiating noise sources. In *Internoise*, Dearborn, MI, USA, 2002.
- [Hen02] V. C. Henriquez. *Numerical Transducer Modeling*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 2002.
- [HIJT09] P. Hardy, M. Ichchou, L. Jézéquel, and D. Trentin. A hybrid local energy formulation for plates mid-frequency flexural vibrations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28 :121–130, 2009.
- [HM80] A. L. Hale and L. Meirovitch. A general substructure synthesis method for the dynamic simulation of complex structures. *Journal of Sound and Vibration*, 69(2) :309–326, 1980.
- [HM82] A. L. Hale and L. Meirovitch. A general procedure for improving substructures representation in dynamic synthesis. *Journal of Sound and Vibration*, 84(2) :269–287, 1982.
- [HS73] J.O. Hallquist and V.W. Snyder. Linear damped vibratory structures with arbitrary support conditions. *Journal of Applied Mechanics – Trans. ASME*, 40 Ser. E(1) :312–313, 1973.
- [Hur64] W. C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems by component mode synthesis. *Technical Report NASA-CR-53057*, NASA, Jet Propulsion Laboratory, 1964.
- [Hur65] W. C. Hurty. Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4) :678–685, April 1965.
- [IBJ01] M. Ichchou, A. Le Bot, and L. Jézéquel. A transient local energy approach as an alternative to transient sea : wave and telegraph equations. *Journal of Sound and Vibration*, 246 :829–840, 2001.

- [IJ96] M.N. Ichchou and L. Jézéquel. Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 195 :679–685, 1996.
- [Jac76] R.G. Jacquot. The response of a system when modified by the attachment of an additional sub-system. *Journal of Sound and Vibration*, 49(3) :345–351, 1976.
- [JL00] C.-C. Ji and C. Liang. A study on an estimation method for applied force on the rod. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(11-12) :1209–1220, 2000.
- [JS94a] L. Jézéquel and H. D. Setio. Component modal synthesis methods based on hybrid models, part i : Theory of hybrid models and modal truncation methods. *Journal of Applied Mechanics*, 61(1) :100–108, 1994.
- [JS94b] L. Jézéquel and H. D. Setio. Component modal synthesis methods based on hybrid models, part ii : Numerical tests and experimental identification of hybrid models. *Journal of Applied Mechanics*, 61(1) :109–116, 1994.
- [Juh93] P. Juhl. *The Boundary Element Method for Sound Field Calculations*. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1993.
- [Jé85] L. Jézéquel. *Synthèse modale : théorie et extensions*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, France, 1985.
- [LARB01] P. Ladevèze, L. Arnaud, P. Rouch, and C. Blanzé. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18(1-2) :193–214, 2001.
- [LMKL00] J.-J. Liu, C.-K. Ma, I.-C. Kung, and D.-C. Lin. Input force estimation of a cantilever plate by using a system identification technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(11-12) :1309–1322, 2000.
- [Mac71] Richard H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 1 :581–601, 1971.
- [MCDG07] C. Pezerat M. C. Djamaa, N. Ouelaa and J. L. Guyader. Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering. *Journal of Sound and Vibration*, 301 :560–575, 2007.
- [MCL03] C.-K. Ma, J.-M. Chang, and D.-C. Lin. Input force estimation of beam structures by an inverse method. *Journal of Sound and Vibration*, 259(2) :387–407, 2003.
- [MH82] L. Meirovitch and A.L. Hale. A general dynamic synthesis for structures with discrete substructures. *Journal of Sound and Vibration*, 85(4) :445–457, 1982.

BIBLIOGRAPHIE

- [MO92] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Interactions fluides-structures*. Masson, 1992.
- [MO95] H. J.P. Morand and R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction*. Wiley & Sons, 1995.
- [Mor98] P. Moron. *Mise en oeuvre de méthodes énergétiques dans l'étude du comportement vibratoire de structures complexes dans le domaine des moyennes et des hautes fréquences*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 1998.
- [Noi70] D. U. Noiseux. Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of Acoustical Society of America*, 47 :238–247, 1970.
- [Pav76] G. Pavic. Measurement of structure borne wave intensity : Part i, formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2) :221–230, 1976.
- [PG99] L. Perotin and S. Granger. An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure : Part 2, flow induced vibration application. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1999.
- [PG00] C. Pezerat and J.-L. Guyader. Identification of vibration sources. *Applied Acoustics*, 63 :309–324, 2000.
- [Rub75] S. Rubin. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 13(8) :995–1006, 1975.
- [SBS13a] K. Soobbarayen, S. Besset, and J.-J. Sinou. Influence of physical parameters and operating conditions for structural integrity of mechanical system subjected to squeal noise. *Key Engineering Materials*, pages 1076–1084, 2013.
- [SBS13b] K. Soobbarayen, S. Besset, and J.-J. Sinou. Noise and vibration for a self-excited mechanical system with friction. *Applied Acoustics*, 74(10) :1191–1204, 2013.
- [SBS15] K. Soobbarayen, S. Besset, and J.-J. Sinou. A simplified approach for the calculation of acoustic emission in the case of friction-induced noise and vibration. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 50-51 :732–756, 2015.
- [Sch04] T. Schmitt. *Modélisation des transferts acoustiques en moyennes et hautes fréquences par méthode énergétique : application à l'encapsulation des compartiments moteurs*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2004.
- [SL05] P. Shorter and R. Langley. Vibro-acoustic analysis of complex systems. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3) :669–699, 2005.
- [Soo14] K. Soobbarayen. *Dynamique non-linéaire et rayonnement acoustique des structures comportant des interfaces frottantes*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2014.

- [SSB14] K. Soobbarayen, J.-J. Sinou, and S. Besset. Numerical study of friction-induced instability and acoustic radiation - effect of ramp loading on the squeal propensity for a simplified brake model. *Journal of Sound and Vibration*, 333 :5475–5493, 2014.
- [TBG14a] R. Troian, S. Besset, and F. Gillot. Shape optimization under vibroacoustic criteria in the mid-high frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, 22(2), 2014.
- [TBG14b] R. Troian, S. Besset, and F. Gillot. Shape optimization under vibroacoustic criteria in the mid-high frequency range using gradient-based approach. In *EURODYN 2014*, Porto, Portugal, 30 June - 2 July 2014.
- [Wei68] J.T. Weissenburger. Effect of local modifications on the vibration characteristics of linear systems. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :327–332, 1968.